領域がなめらかでない場合 $H^1(\Omega)$ が $H^1(\mathbb{R}^2)$ へ拡張できない例

2023 年 11 月 29 日

問題　$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ とし, $u \in H^1(\Omega)$ を用意する. このとき, ある $\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^N)$ が存在して

$$u = \tilde{u}|_{\Omega} \quad \text{in } \Omega,$$

すなわち, **必ず**

$$H^1(\Omega) = \{u :^{\exists} \tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^N) \quad \text{s.t. } \tilde{u} = u \quad \text{a.e. in } \Omega\}$$

と言えるか.

結論　この問題の主張は偽である. V. Barbu[1, p.111] の反例を確かめる.

$\alpha < 0$, $\beta > 1$ で $2\alpha + \beta > 1$ を満たすとする.

$$\Omega = \{x := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < x_1^{\beta}\}$$

とおくと, $u(x) := x_1^{\alpha}$ について

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} |x_1^{\alpha}|^2 dx \\
&= \int_0^1 \int_0^{x_1^{\beta}} x_1^{2\alpha} dx_2 dx_1 \\
&= \int_0^1 x_1^{2\alpha} \cdot x_1^{\beta} dx_1 \\
&= \int_0^1 x_1^{2\alpha+\beta} dx_1 \\
&< +\infty,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{du}{dx_1} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} |\alpha x_1^{\alpha-1}|^2 dx \\
&= \alpha^2 \int_0^1 \int_0^{x_1^{\beta}} x_1^{2(\alpha-1)} dx_2 dx_1 \\
&= \alpha^2 \int_0^1 x_1^{2(\alpha-1)} \cdot x_1^{\beta} dx_1 \\
&= \alpha^2 \int_0^1 x_1^{2\alpha+\beta-2} dx_1 \\
&< +\infty,
\end{aligned}$$

$$\left\| \frac{du}{dx_2} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0.$$

よって, $u \in H^1(\Omega)$ である. 一方, **もし, ある** $\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^2)$ **が存在して**

$$u = \tilde{u}|_\Omega \quad \text{in } \Omega$$

ならば, ソボレフの埋め込み定理 $H^1(\mathbb{R}^2) \subset L^p(\mathbb{R}^2)$ $({}^\forall p \geq 2)$ より,

$$x_1^{\alpha p} \in L^1(\Omega)$$

となるが, ある $\bar{p} \geq 2$ が存在して

$$\bar{p} \geq \frac{1+\beta}{-\alpha}$$

であるので, $\alpha\bar{p} + \beta \leq -1$ より,

$$\begin{aligned}
\|x_1^{\alpha\bar{p}}\|_{L^1(\Omega)} &= \int_\Omega |x_1^{\alpha\bar{p}}| dx \\
&= \int_0^1 \int_0^{x_1^\beta} x_1^{\alpha\bar{p}} dx_2 dx_1 \\
&= \int_0^1 x_1^{\alpha\bar{p}} \cdot x_1^\beta dx_1 \\
&= \int_0^1 x_1^{\alpha\bar{p}+\beta} dx_1 \\
&\geq \int_0^1 x_1^{-1} dx_1 = +\infty.
\end{aligned}$$

よって矛盾. □

この理由は領域 Ω のなめらかさにある. つまり拡張定理には領域のなめらかさが重要である. 実際, 以下が成立する ([1, p.111, Theorem 3.2.1], [2, p.130, 定理 6.9])

定理 開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ の境界 $\partial\Omega$ が有界で C^1 級, もしくは $\Omega = \mathbb{R}^N_+$ ならば拡張作用素 $E : H^1(\Omega) \to H^1(\mathbb{R}^N)$ が存在して

$$\|Eu\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)} \quad \text{for all } u \in H^1(\Omega).$$

ただし, $C > 0$ は u に無関係な定数.

参考文献

[1] V. Barbu, *Partial Differential Equations and Boundary Value Problems*, Kluwer Academic Publishers, (1998).

[2] 宮島 静雄, ソボレフ空間の基礎と応用, 共立出版, (2006).