ほとんど至るところの点の有界性からすべての点での有界性

2023 年 11 月 11 日

定理　$T > 0$ とし, V と H は回帰的 Banach 空間で, $V \hookrightarrow H$ なる連続な埋め込みを仮定する. もし, $u \in L^\infty(0,T;V) \cap C([0,T];H)$ ならば, $C := \|u\|_{L^\infty(0,T;V)}$ とおくと

$$\big\|u(t)\big\|_V \le C \quad \text{for all } t \in [0,T]. \tag{1}$$

証明　$u \in L^\infty(0,T;V)$ より

$$\big\|u(t)\big\|_V \le C \quad \text{for a.a. } t \in (0,T)$$

が成立している. そこで, もし (1) が成立しないと仮定すると, ある $\bar{t} \in [0,T]$ が存在して

$$\big\|u(\bar{t})\big\|_V > C.$$

ここで, $u \in L^\infty(0,T;V)$ よりある $\{t_n\} \subset [0,T]$ が存在して

$$t_n \to \bar{t} \quad \text{as } n \to +\infty,$$

$$\big\|u(t_n)\big\|_V \le C \quad ({}^\forall n \in \mathbb{N})$$

とできるので, 有界性と u の $[0,T]$ における H での連続性から, ある $\bar{u} \in V$ とある部分列 t_{n_k} が存在して

$$u(t_{n_k}) \to \bar{u} \quad \text{weakly in } V,$$

$$u(t_{n_k}) \to u(\bar{t}) \quad \text{strongly in } H \quad (\text{as } n \to +\infty).$$

よって, H における極限の一致から

$$\bar{u} = u(\bar{t}) \quad \text{in } H$$

だが, 方程式の比較から

$$\bar{u} = u(\bar{t}) \quad \text{in } V$$

を得る. また弱収束より

$$\big\|u(\bar{t})\big\|_V = \|\bar{u}\|_V \le \liminf_{k \to +\infty} \big\|u(t_{n_k})\big\|_V \le C.$$

□