拡張版 Gronwall の不等式

2023 年 6 月 16 日

定理　$m \in L^1(0,T)$ は $(0,T)$ のほとんど至るところで $m \geq 0$ とする．また a を正定数とする．このとき $\phi \in C([0,T])$ がすべての $t \in [0,T]$ に対して

$$\frac{1}{2}\phi^2(t) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^t m(s)\phi(s)ds$$

を満たすならば

$$\bigl|\phi(t)\bigr| \leq a + \int_0^t m(s)ds$$

がすべての $t \in [0,T]$ に対して成立する．

証明　証明は [1, Lemma A.5, p.157] による．$\varepsilon > 0$ とし, $t \in [0,T]$ に対して

$$\psi_\varepsilon(t) := \frac{1}{2}(a+\varepsilon)^2 + \int_0^t m(s)\phi(s)ds$$

とおく．このとき, ほとんど至るところの $t \in (0,T)$ に対して

$$\frac{d\psi_\varepsilon}{dt}(t) = m(t)\phi(t)$$

が成立し, さらに

$$\frac{1}{2}\phi^2(t) \leq \psi_0(t) \leq \psi_\varepsilon(t)$$

がすべての $t \in [0,T]$ に対して成立する．よってこの結果からほとんど至るところの $t \in (0,T)$ に対して

$$\frac{d\psi_\varepsilon}{dt}(t) \leq m(t)\sqrt{2}\sqrt{\psi_\varepsilon(t)}$$

を得る．一方, 仮定より

$$\begin{aligned}
\psi_\varepsilon(t) &= \frac{1}{2}(a+\varepsilon)^2 + \int_0^t m(s)\phi(s)ds \\
&\geq \frac{1}{2}(a+\varepsilon)^2 + \left(\frac{1}{2}\phi^2(t) - \frac{1}{2}a^2\right) \\
&\geq \frac{1}{2}(a+\varepsilon)^2 - \frac{1}{2}a^2 \\
&\geq \frac{1}{2}\varepsilon^2
\end{aligned}$$

がすべての $t \in [0,T]$ に対して成立する．いま $t \mapsto \psi_\varepsilon(t)$ は絶対連続で,

$$\frac{d}{dt}\sqrt{\psi_\varepsilon(t)} = \frac{1}{2\sqrt{\psi_\varepsilon(t)}}\frac{d\psi_\varepsilon}{dt}(t)$$

がほとんど至るところの $t \in (0,T)$ に対して成立するので

$$\frac{d}{dt}\sqrt{\psi_\varepsilon(s)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}m(s)$$

がほとんど至るところの $s \in (0,T)$ に対して成立するので, それゆえ, $(0,t)$ で積分すれば

$$\sqrt{\psi_\varepsilon(t)} \leq \sqrt{\psi_\varepsilon(0)} + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t m(s)ds.$$

がすべての $t \in [0,T]$ に対して成立する. 以上より

$$\begin{aligned} \left|\phi(t)\right| &\leq \sqrt{2}\sqrt{\psi_\varepsilon(t)} \\ &\leq \sqrt{2\psi_\varepsilon(0)} + \int_0^t m(s)ds \\ &= a + \varepsilon + \int_0^t m(s)ds. \end{aligned}$$

がすべての $t \in [0,T]$ に対して成立する. $\varepsilon > 0$ の任意性より主張が成立する. □

参考文献

[1] H. Brézis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les especes de Hilbert*, North-Holland, Amsterdam, 1973.