弱連続性について

2022 年 8 月 24 日

V: Banach 空間, H: Hilbert 空間とし, $V \subset H \subset V'$ とする. また, $T > 0$ とする.

定理　$u \in H^1(0,T;V') \cap L^\infty(0,T;H)$ ならば u は H 上で弱連続, すなわち任意の $t \in [0,T]$ に対して $s \to t$ ならば

$$u(s) \to u(t) \quad \textit{weakly in } H.$$

証明　ソボレフの埋め込みより, $u \in C([0,T];V')$ とできる. 主張を背理法で示す. もし, ある $t \in [0,T]$ が存在して $s \to t$ であるにも関わらず, $u(s)$ が $u(t)$ に H で弱収束しないと仮定する. このとき, 弱収束の否定から, ある $z^* \in H$ とある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して, 任意の $\delta > 0$ に対してある $s_\delta \in [0,T]$ で $0 < |s_\delta - t| < \delta$ なるものが存在して

$$\left|\left(z^*, u(s_\delta) - u(t)\right)_H\right| \geq \varepsilon_0$$

を満たす. よって任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $\delta := 1/n$ とすれば, ある $s_n \in [0,T]$ で $s_n \to t$ $(n \to +\infty)$ なるものが存在して

$$\left|\left(z^*, u(s_n) - u(t)\right)_H\right| \geq \varepsilon_0$$

となる. $u \in L^\infty(0,T;H)$ より $\{s_n\}$ の部分列 $\{s_{n_k}\}$ で

$$\left|u(s_{n_k})\right|_H \leq C := |u|_{L^\infty(0,T;H)} \quad \text{for all } k \in \mathbb{N}$$

なるものがとれるので, 部分列 $\{s_{n_k}\}$ をとりなおせば, ある $u_* \in H$ が存在して

$$u(s_{n_k}) \to u_* \quad \text{weakly in } H \quad \text{as } k \to +\infty$$

とできる. 一方 $s_{n_k} \to t$ であることから $u \in C([0,T];V')$ より

$$u(s_{n_k}) \to u(t) \quad \text{in } V'$$

が得られることに注意すれば $u_* = u(t)$ in H を得る. ゆえに

$$\left|\left(z^*, u(s_{n_k}) - u_*\right)_H\right| = \left|\left(z^*, u(s_{n_k}) - u(t)\right)_H\right| \geq \varepsilon_0 \quad \text{for all } k \in \mathbb{N}$$

から矛盾を得る. □