部分列の収束

2022 年 4 月 15 日

定理　$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列, $\alpha \in \mathbb{R}$ とする. $a_n \geq \alpha$ を満たす項が無数にあり, $a_n < \alpha$ を満たす項も無数にあると仮定する. このとき, $a_n \geq \alpha$ を満たす項でできた部分列 $\{a^+_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ と, $a_n < \alpha$ を満たす項でできた部分列 $\{a^-_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ がともに α へ収束するならば, 元の数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ も α に収束する.

証明　仮定より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $K^+_\varepsilon, K^-_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して

$$|a^+_{n_k} - \alpha| < \varepsilon \quad ({}^\forall k \geq K^+_\varepsilon),$$

$$|a^-_{n_k} - \alpha| < \varepsilon \quad ({}^\forall k \geq K^-_\varepsilon),$$

よって $K := \max\{K^+_\varepsilon, K^-_\varepsilon\}$ とおくと

$$|a^+_{n_k} - \alpha| < \varepsilon, \quad |a^-_{n_k} - \alpha| < \varepsilon \quad ({}^\forall k \geq K).$$

そこで, $a^+_{n_K}$ に対応する元の数列を a_{N^+}, $a^-_{n_K}$ に対応する元の数列を a_{N^-} とおき, さらに $N_\varepsilon := \max\{N^+, N^-\}$ とおけば, $n \geq N_\varepsilon$ のとき, 数列の第 n 項 a_n は部分列 $\{a^+_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ か部分列 $\{a^-_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ の第 K 項以降なので

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon$$

を満たす. よって $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ も α に収束する. □