共役空間における稠密性

2022 年 4 月 14 日

定理　V を回帰的 Banach 空間, H を Hilbert 空間とする．もし $V \subset H$ が稠密ならば, それぞれの共役空間において $H' \subset V'$ は稠密となる．

証明　$T : V' \to H'$ を $v^* \in V'$ に対して

$$\langle Tv^*, z\rangle_{H',H} := \langle v^*, z\rangle_{V',V} \quad \text{for all } z \in H$$

によって定義する．このとき, $R(T) := T(H')$ は V' の線形部分空間となる．さらに $R(T)$ と H' は同一視できる．あとは

$$\overline{R(T)}^{V'} =: \overline{R(T)} = V'$$

を示せばよい．もしそうでないならば $\overline{R(T)}$ は V' の真部分集合となるので, ある $v_0^* \in V' \setminus \overline{R(T)}$ が存在する．よって Hahn–Banach の拡張定理 [2, p.97, 系 6.4] より, ある $\Phi_0 \in V''$ が存在して

$$\begin{aligned} &\Phi_0(v^*) = \langle \Phi_0, v^*\rangle_{V'',V'} = 0 \quad \text{for all } v^* \in \overline{R(T)}, \\ &\Phi_0(v_0^*) = \langle \Phi_0, v_0^*\rangle_{V'',V'} = 1 \end{aligned}$$

とできる．今, V は回帰的 Banach 空間なので, ある $v_0 \in V$ が存在して,

$$\Phi_0(v^*) = \langle v^*, v_0\rangle_{V^*,V} \quad \text{for all } v^* \in V^*$$

とできる．そこで, 任意の $\varphi \in H' \subset V'$ に対して, $T\varphi \in R(T) \subset \overline{R(T)}$ より

$$0 = \Phi_0(T\varphi) = \langle T\varphi, v_0\rangle_{V',V} = \langle \varphi, v_0\rangle_{H',H}.$$

すなわち, $v_0 = 0$ in H' を得る．よって, それは

$$\Phi_0(v^*) = \langle v^*, v_0\rangle_{V^*,V} = 0 \quad \text{for all } v^* \in V^*$$

を意味するが, $v^* = v_0^*$ のときには $\Phi_0(v_0^*) = 1$ に矛盾する．ゆえに

$$\overline{R(T)} = V'$$

を得る．　□

参考文献

[1] H. Brézis, “Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations”, Springer, New York-Dordrecht-Heidelberg-London, 2010.

[2] 宮寺 功, 「関数解析」, ちくま学芸文庫, 2018.