平行移動の連続性

2022 年 4 月 14 日

定理　X を回帰的 Banach 空間, $p \in [1, \infty)$ とし, $f \in L^p(a, b; X)$ とする. $h > 0$ に対して $\tau_h f(t) := f(t+h)$ によって平行移動を定義する. ここで, f が $\mathbb{R}$ 全体で定義されていない場合には必要に応じて f を $\mathbb{R}$ への 0 拡張 $\tilde{f}$ に置き換えて $\tau_h f(t) := \tilde{f}(t+h)$ と定義する.
　このとき,

$$\tau_h f \to f \quad \text{in } L^p(a, b, X) \quad \text{as } h \to 0.$$

証明　$\tilde{f} \in L^p(\mathbb{R}; X)$ に注意すると稠密性より, ある $f_n \in C_0(\mathbb{R}; X)$ が存在して

$$f_n \to \tilde{f} \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}; X) \quad \text{as } n \to \infty.$$

ここで,

$$\begin{aligned}
|\tau_h f - f|_{L^p(a,b,X)} &\leq |\tau_h f - \tilde{f}|_{L^p(\mathbb{R},X)} \\
&\leq |\tau_h f - \tau_h f_n|_{L^p(\mathbb{R},X)} + |\tau_h f_n - f_n|_{L^p(\mathbb{R},X)} + |f_n - \tilde{f}|_{L^p(\mathbb{R},X)} \\
&= 2|\tilde{f} - f_n|_{L^p(\mathbb{R},X)} + |\tau_h f_n - f_n|_{L^p(\mathbb{R},X)}.
\end{aligned}$$

そこで, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して,

$$|\tilde{f} - f_N|_{L^p(\mathbb{R},X)} < \frac{\varepsilon}{4}$$

とできるので, この N に対して, ある $\delta_\varepsilon > 0$ が存在して

$$|\tau_h f_N - f_N|_{L^p(\mathbb{R},X)} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{for all } h; 0 < h < \delta_\varepsilon$$

を示せばよい. $f_N \in C_0(\mathbb{R}; X)$ より, ある $M > 0$ が存在して, 任意の $t \in \mathbb{R}; |t| > M$ に対して

$$f_N(t) = 0, \quad \tau_h f_N(t) = 0 \quad \text{for all } h \in (0, 1]$$

とできる. さらに連続性から任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$|\tau_h f_N(t) - f_N(t)|_X \to 0 \quad \text{in } X \quad \text{as } h \to 0.$$

また, ある定数 $C_N > 0$ が存在して, 任意の $t \in \mathbb{R}; |t| \leq M + 1$ と $h \in (0, 1]$ に対して

$$|\tau_h f_N(t) - f_N(t)|_X^p \leq 2^{p-1}|f_N(t+h)|_X^p + 2^{p-1}|f_N(t)|^p \leq 2^p C_N^p$$

とできる. よってルベーグの有界収束定理より

$$\lim_{h \to 0} \int_{|t| \leq M+1} |\tau_h f_N(t) - f_N(t)|_X^p = 0.$$

ゆえに, $h \in (0,1]$ であれば

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} |\tau_h f_N(t) - f_N(t)|_X^p dt \\
&\leq \int_{|t| \leq M+1} |\tau_h f_N(t) - f_N(t)|_X^p dt + \int_{|t|>M} |\tau_h f_N(t) - f_N(t)|_X^p dt \\
&= \int_{|t| \leq M+1} |\tau_h f_N(t) - f_N(t)|_X^p dt
\end{aligned}$$

より, ある $\delta_\varepsilon \in (0,1]$ が存在して

$$|\tau_h f_N - f_N|_{L^p(\mathbb{R},X)}^p = \int_{\mathbb{R}} |\tau_h f_N(t) - f_N(t)|_X^p dt < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p \quad \text{for all } h; 0 < h < \delta_\varepsilon$$

とできる. □

参考文献

[1] F. Boyer and P. Fabrie, "Eléments d'analyse pour l'étude de quelques modéles d'écoulements de fluides visqueux incompressibles", Mathématiques & Applications 52, Springer-Verlag, Berlin, 2006.