# 超関数とは —学部低学年生にも分かるデルタ関数—

2026 年 10 月 17 日

この資料は厳密性は犠牲にするけれどできる限り簡単にデルタ関数, もしくは超関数をイメージしてもらうために作っています*.

## 1 導入

私たちは**関数**を高等学校までに学習してきています. 例えば, 実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して実数 $y \in \mathbb{R}$ がただ 1 つ決まるとき, $y$ は $x$ の関数であるといい

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & \cup & & \cup \\ & x & \mapsto & y \end{array}$$

とかいたり, $y = f(x)$ とかくことにしました. **これを関数に対して実数がただ 1 つ決まるとき**に拡張します. 例えば関数の集合 $X$ から元 $u$ を選び, 関数 $u$ に対して実数 $y \in \mathbb{R}$ がただ 1 つ決まるとき, つまり

$$\begin{array}{rccc} T: & X & \to & \mathbb{R} \\ & \cup & & \cup \\ & u & \mapsto & y \end{array}$$

のような決まりが定まるとき, $T$ のことを**汎関数** (はんかんすう) ということにします*. つまり $T(u) = y$ とかけ, $u$ は関数, $y$ は実数です. 例えば,

$$T(u) := \int_a^b u(x)dx, \quad T(u) := \int_a^b |u(x)|^2 dx$$

のように関数 $u$ が与えられたら, 区間 $[a, b]$ 上での $u$ の積分値や $|u|^2$ の積分値を返すような決まり $T$ は汎関数と言えます. 汎関数の中でも特に, $T$ が**線形**†であるとき, $T$ のことを**線形汎関数**といいます. 以下この節では, $X$ を区間 $[a, b]$ 上の連続関数全体とし, $a < 0 < b$ とします. 例えば, ある関数 $g \in X$ を固定して,

$$T_g(u) := \int_a^b g(x)u(x)dx$$

---

*この資料は学部 2 回生の K 君からの「デルタ関数ってどんな利点があるんですか」という素朴な問いに対する回答のために用意しました.

*これを一般の集合 $X$ や $Y$ に広げて

$$f : X \to Y$$

とかき, **写像**とよぶことにしました. そして, 汎関数も写像もひっくるめて関数と言ってしまうことがよくあります.

†線形とは任意の関数 $u, v \in X$ と任意の定数 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$$

を満たすことをいいます.

のように, $g$ とかけ算をして積分するという決まり $T_g$ は**汎関数**になります. $g(x) := 1$ を選べば

$$T_1(u) := \int_a^b 1 \times u(x)dx = 「u \text{ の積分値}」$$

となり $T_1$ は前述の左の $u$ の積分値を返す決まりになりますし, $g(x) := 1/(b-a)$ を選べば,

$$T_{1/(b-a)}(u) := \int_a^b \frac{1}{b-a} \times u(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b u(x)dx = 「u \text{ の平均値}」$$

$T_{1/(b-a)}$ は $u$ の平均値を返す決まりになります. $T_g$ に付いている $g$ は「$g$ によって作られる (定まる)」という雰囲気を表現しています.

**定義 1.** 関数 $u \in X$ に対して, $u$ の原点での値 $u(0) \in \mathbb{R}$ を考えます. つまり

$$\begin{array}{rccc} T: & X & \to & \mathbb{R} \\ & \cup & & \cup \\ & u & \mapsto & u(0) \end{array}$$

を与える決まりのことをデルタ関数 (ここではデルタ線形汎関数というべき) といい, $T_\delta$ とかきます. つまり

$$T_\delta(u) = u(0).$$

先の例に戻りましょう.

$$\int_a^b 1 \times u(x)dx = 「u \text{ の積分値}」$$

を与える**線形汎関数** $T$ を先に考えると, この線形汎関数 $T$ を作っている (定めている)$g$ は $g(x) = 1$ という**関数**でした. また,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b u(x)dx = 「u \text{ の平均値}」$$

を与える**線形汎関数** $T$ を先に考えると, この線形汎関数 $T$ を作っている (定めている)$g$ は $g(x) = 1/(b-a)$ という**関数**でした.

では, デルタ関数 $T_\delta$ を作っている (定めている)**「関数」**はどんな**「関数」**でしょうか... そのような**「関数」**を仮に $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とおいてみます. するとすべての関数 $u \in X$ に対して,

$$\int_a^b \delta(x)u(x)dx = u(0)$$

を満たすのだから, 特に $u$ として原点 $x = 0$ で $u(0) = 0$ を満たすような, ありとあらゆる関数 $u$ を代入したとき 1 つ目の条件が出てきます. 実際, いつでも

$$\int_a^b \delta(x)u(x)dx = u(0) = 0$$

になるためには

$$\delta(x) = 0 \quad (0 \text{ 以外のすべて } x \text{ に対して})$$

でなければ困ります. なぜなら, $\delta(x) \neq 0$ のところで $u(x) \neq 0$ である $u$ を特別に選んで積分値が 0 でないようにできてしまうからです. つまり, $\delta$ に要請したい第 1 条件は

(i) $\quad \delta(x) = 0, (x \neq 0)$

です.

次に $u$ として $u(x)=1$ なる関数を選ぶと[‡]

$$\int_a^b \delta(x)\times 1dx = u(0) = 1$$

より, $\delta$ に要請したい第 2 条件は

(ii) $\displaystyle\int_a^b \delta(x)dx = 1$

です. **しかしながら, (i) と (ii) は直感的に不自然なことを言っています.** $x=0$ **以外の点ですべてで** $\delta(x)=0$ **にもかかわらず, 積分値は** $1$ **になるようなことは関数としてはあり得ません.**

## 2　超関数とデルタ関数の解釈について

線形汎関数の中でも特に, $T$ が**適切な意味で連続**[*]であるとき, $T$ のことを**超関数**と呼ぶことにします. 前節の定義を厳密に行うためには関数の集合を, 例えば $X := C_0^\infty(\mathbb{R})$ を選びます. ここで,

$$C_0^\infty(\mathbb{R}) := \left\{ u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: \begin{array}{l} u \text{ は } \mathbb{R} \text{ 上何回でも微分可能でその導関数が連続,} \\ \text{さらに } \mathbb{R} \text{ の遠方では関数の値が } 0 \end{array} \right\}.$$

ここで, よく見られるデルタ関数の定義を確認します.

**定義 2.**

$$\delta(x) := \begin{cases} \infty & (x=0); \\ 0 & (x\neq 0), \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx = 1$$

を満たす $\delta$ をデルタ関数といいます. **しかしながら, 前節で見たようにやはり直感的に不自然なことを言っています.**

これは関数の世界と線形汎関数 (ここではさらに連続性を含めて超関数) の世界との行き来に由来します.

| | 線形汎関数・超関数 | | 関数 |
|---|---|---|---|
| 積分量 | $T_1$ | $\Longleftrightarrow$ | $g(x)=1$ |
| 平均値 | $T_{1/(b-a)}$ | $\Longleftrightarrow$ | $g(x)=\dfrac{1}{b-a}$ |
| デルタ関数 | $T_\delta$ | | **関数としては表しきれない** |

デルタ関数 (超関数と言うべき)$T_\delta$ を作る (定める) 元となる $g$ は一体何なのかと考えても, $g$ を関数としては表しきれません. しかし, 無理矢理関数っぽく書くならば定義 2 のように定義する $\delta$ をもってして $g(x)=\delta(x)$ と言おうという訳です.

## 3　デルタ関数 (超関数) を定義する利点

最後に, デルタ関数 (超関数) を定義する利点を 2 つ挙げます.

---

[‡]2 節のように $X := C_0^\infty(\mathbb{R})$ とすると, $u(x)=1$ は遠方で 0 にならないので $X$ に属しません. その場合は, 原点の近くで 1 となり遠方で 0 となる $u\in X$ を選べば, 同様に「原点を含む区間での $\delta$ の積分値は 1」という要請が得られます.

[*]ここでの連続性についての説明は煩雑なので省略します.

### 3.1 微分の拡張 (超関数としての微分) とその表現

$g \in X := C_0^1(\mathbb{R})$ とします. 部分積分により, 任意の $u \in X$ に対して, $u, g$ は共に $\mathbb{R}$ の遠方で 0 であるので

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} g'(x)u(x)dx &= -\int_{-\infty}^{\infty} g(x)u'(x)dx + [g(x)u(x)]_{x=-\infty}^{x=\infty} \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} g(x)u'(x)dx\end{aligned}$$

超関数の意味でかくと

$$T_{g'}(u) = -T_g(u')$$

となります. これを通常の微分に代わる**弱い意味での微分**として定義に採用するのが**超関数としての微分**の考え方です. つまり, 超関数 $T_g$ と関数 $g$ の対応において超関数 $T_g$ の「微分」を $g$ の微分 ($g$ が微分できなくても部分積分で右辺で解釈可能) を利用して

$$DT_g(u) := -T_g(u') \quad (u \in X)$$

で定義してしまおうという訳です*.

このとき, 次のような関数 $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を考えましょう.

$$H(x) := \begin{cases} 1 & (x \geq 0); \\ 0 & (x < 0). \end{cases}$$

これを Heaviside(ヘヴィサイド) 関数とよびます. もちろん, $H(x)$ は $x = 0$ では微分できません. しかし, 関数 $H$ によって作られる (定まる) 超関数 $T_H$ を考えると興味深いことが分かります. 任意の $u \in X$ に対して

$$\begin{aligned}DT_H(u) &= -T_H(u') \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)u'(x)dx \\ &= -\left(\int_{-\infty}^{0} H(x)u'(x)dx + \int_{0}^{+\infty} H(x)u'(x)dx\right) \\ &= -\left(\int_{-\infty}^{0} 0 \times u'(x)dx + \int_{0}^{+\infty} 1 \times u'(x)dx\right) \\ &= -\int_{0}^{+\infty} u'(x)dx \\ &= -[u(x)]_{x=0}^{x=\infty} = u(0) = T_\delta(u)\end{aligned}$$

が成立し, これは Heaviside(ヘヴィサイド) 関数 $H$ の超関数 $T_H$ としての微分 $DT_H$ がデルタ関数 $T_\delta$ と一致することを意味します†

$$DT_H = T_\delta.$$

これがデルタ関数を定義した利点の 1 つです.

---

*$DT_g$ の $D$ は微分を表しています. 別に $T_g'$ と書いてもいいのですが, $T_{g'}$ と混乱するので $DT_g$ を採用します.

†実際, Heaviside(ヘヴィサイド) 関数 $H$ の導関数をイメージしてみましょう. **原点 $x = 0$ 以外では 0 で, 原点 $x = 0$ では傾きが $+\infty$ と言われるとそう解釈できなくもありません.**

### 3.2 微分方程式への応用

$\lambda > 0$ を定数とし, 未知関数 $v := v(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対する次の微分方程式を考えます:

$$v'(x) + \lambda v(x) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

ここで $f$ は外力を表す与えられた関数です. $f(x) = 0$ であれば,

$$v'(x) + \lambda v(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

となり一般解は

$$v(x) = Ce^{-\lambda x} \quad (C \text{ は任意定数})$$

で与えられます.

では $f(x) = \delta(x)$, つまり, デルタ関数を外力 $f$ として選んでみます. デルタ関数は普通の関数ではないので微分方程式に意味がありません. そこで, この微分方程式を次のように超関数の意味で解釈してみましょう.

$$DT_v + \lambda T_v = T_\delta,$$

「$v$ が定める超関数 $T_v$ の超関数微分」+「$v$ が定める超関数 $T_v$ の $\lambda$ 倍」=「$\delta$ が定める超関数 $T_\delta$」.

すると, 「$x < 0$ では $v(x) = 0$」という条件の下で

$$v(x) = H(x)e^{-\lambda x} = \begin{cases} e^{-\lambda x} & (x \geq 0), \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

が解となります[‡]. 実際, 任意の $u \in X$ に対して, 部分積分より

$$\begin{aligned} DT_v(u) &= -\int_{-\infty}^{\infty} v(x)u'(x)dx \\ &= -\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}u'(x)dx \\ &= \int_0^{\infty} (e^{-\lambda x})'u(x)dx - [e^{-\lambda x}u(x)]_{x=0}^{x=\infty} \\ &= -\lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}u(x)dx - \big(0 - u(0)\big) \\ &= -\lambda \int_{-\infty}^{\infty} H(x)e^{-\lambda x}u(x)dx + u(0) \\ &= -\lambda T_v(u) + T_\delta(u). \end{aligned}$$

このように外力としてデルタ関数を選んだ微分方程式の解を**基本解**とよぶことがあります. なぜ「基本」なのでしょうか. それは, 連続で $\mathbb{R}$ の遠方で 0 となる一般の外力 $f \in C_0(\mathbb{R})$ に対して

$$w'(x) + \lambda w(x) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

を満たす解 $w$ が基本解 $v$ を使って

$$w(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)v(x - y)dy$$

[‡]条件を課さなければ, $v(x) = H(x)e^{-\lambda x} + Ce^{-\lambda x}$ ($C$ は任意定数) もすべて解になります. $x < 0$ で $v(x) = 0$ という条件から $C = 0$ に定まります.

とかけることが分かるからです (解の公式のようなもの). これもデルタ関数を定義した利点の 1 つです. 実際, 次の計算が正当化できます (厳密には様々な定理が潜んでいますが).

$$\begin{aligned}
DT_w(u) = -T_w(u') &= -\int_{-\infty}^{\infty} w(x)u'(x)dx \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(y)v(x-y)dy \right) u'(x)dx \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)v(x-y)u'(x)dxdy \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left( \int_{-\infty}^{\infty} v(x-y)u'(x)dx \right) dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)(-T_{v(\cdot-y)}(u'))dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)DT_{v(\cdot-y)}(u)dy.
\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
DT_w(u) + \lambda T_w(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)DT_{v(\cdot-y)}(u)dy + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} w(x)u(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)DT_{v(\cdot-y)}(u)dy + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(y)v(x-y)dy \right) u(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left( DT_{v(\cdot-y)}(u) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} v(x-y)u(x)dx \right) dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left( DT_{v(\cdot-y)}(u) + \lambda T_{v(\cdot-y)}(u) \right) dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)T_{\delta(\cdot-y)}(u)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)u(y)dy \\
&= T_f(u).
\end{aligned}$$

最後から 3 番目の等号は基本解の性質[§], 最後から 2 番目の等号は $T_{\delta(\cdot-y)}$ の定義, 最後の等号は $T_f$ の定義

$$T_f(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)u(x)dx$$

(積分変数の文字を $x$ から $y$ に替えただけ) によります. $u \in X$ は任意なので, 超関数の意味で

$$DT_w + \lambda T_w = T_f$$

が成り立ちます.

最後に関数の世界に戻りましょう. $v(x-y)$ は $y < x$ のときだけ 0 でないので

$$w(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-\lambda(x-y)} f(y)dy$$

であり, $f$ が連続ならば $w$ は $C^1$ 級になります. このとき, 部分積分の計算から $DT_w = T_{w'}$ なので

$$T_{w'+\lambda w} = T_f$$

となります. $w' + \lambda w$ も $f$ も連続なので, これより関数の意味で

$$w'(x) + \lambda w(x) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

が成り立ちます[¶]. これは定数変化法による解の公式と一致しています.

---

[§] ここで $T_{\delta(\cdot-y)}$ はデルタ関数を点 $y$ に平行移動したもので,

$$T_{\delta(\cdot-y)}(u) := u(y) \quad (u \in X)$$

で定めます.

[¶] 連続関数 $g, h$ に対して, すべての $u \in X$ で $T_g(u) = T_h(u)$ ならば $g = h$ です.