各種微分可能性に関する具体例

2026 年 4 月 22 日

$f := f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ とし, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ とする.

定義 1.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

が存在するとき, f は点 $(x, y) = (a, b)$ において x 方向について偏微分可能であるといい, その極限値を

$$\partial_x f(a, b), \quad f_x(a, b), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$$

のようにかく. 同様に

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k}$$

が存在するとき, f は点 $(x, y) = (a, b)$ において y 方向について偏微分可能であるといい, その極限値を

$$\partial_y f(a, b), \quad f_y(a, b), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

のようにかく.

2 次元平面上の点を $\boldsymbol{a} := (a, b)$ と表記すれば, f の点 $\boldsymbol{a}$ における x 方向について偏微分の値は例えば $\partial_x f(\boldsymbol{a})$ と書かれることになるが, これは $\partial_x f((a, b))$ を意味する. しかし括弧が 2 組重なるのは見た目が悪いので, 多くの場合上記のように $\partial_x f(a, b)$ と括弧は 1 組しか書かないことが多い.

以後, 取り上げる例はすべて「原点において」という意味で挙げる:

例 1. [x 方向について偏微分可能だが y 方向について偏微分可能でない例]

$$f(x, y) := |y|$$

実際,

$$\frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{0 - 0}{h} = 0$$

より, $h \to 0$ のとき極限が存在するので, x 方向について偏微分可能で

$$\partial_x f(0, 0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0.$$

一方,

$$\frac{f(0, 0+k) - f(0, 0)}{k} = \frac{|k| - 0}{k}$$

より, $k \to 0+0$ のとき極限は 1, $k \to 0-0$ のとき極限は -1 より一致しないため, $k \to 0$ のとき極限は存在せず, y 方向について偏微分可能でない.

定義 2. $\boldsymbol{a} = (a, b)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ とする.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a})}{h} \quad \left(= \lim_{h \to 0} \frac{f(a + hv_1, b + hv_2) - f(a, b)}{h} \right)$$

が存在するとき, f は点 $(x, y) = \boldsymbol{a}$ において $\boldsymbol{v}$ 方向微分可能であるといい, その極限値を

$$Df(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{v}), \quad \nabla f(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{v}), \quad \mathrm{d}f(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{v}), \quad f'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{v}), \quad D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}), \quad \nabla_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}), \ldots$$

のようにかく. 任意の方向 $\boldsymbol{v}$ に対して f は点 $(x, y) = \boldsymbol{a}$ において $\boldsymbol{v}$ 方向微分可能であるとき, 単に f は点 $\boldsymbol{a}$ において方向微分可能であるという.

ここで, $Df(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{v})$ の D は微分を意味し, f の第 1 引数が点 $\boldsymbol{a}$ における微分であること, 第 2 引数が方向 $\boldsymbol{v}$ に沿った微分であることを意味している (他の表記も同様). $\boldsymbol{v} := \boldsymbol{e}_1 := (1, 0)$ を選べば, $Df(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{e}_1)$ は定義 1 に現れる x 方向の偏微分 $\partial_x f(\boldsymbol{a})$ を意味し, $\boldsymbol{v} := \boldsymbol{e}_2 := (0, 1)$ を選べば, $Df(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{e}_2)$ は定義 1 に現れる y 方向の偏微分 $\partial_y f(\boldsymbol{a})$ を意味する. つまり, $\boldsymbol{v}$ 方向微分は偏微分の一般化であり, x 軸方向や y 軸方向だけでなく, ありとあらゆる**斜め方向の微分**に対応している.

例 2. [x 方向, y 方向について偏微分可能だが, 方向微分可能でない例]

$$f(x, y) := \sqrt{|xy|}$$

実際,

$$\frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{0 - 0}{h} = 0$$

より, $h \to 0$ のとき極限が存在するので, x 方向について偏微分可能で

$$\partial_x f(0, 0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0.$$

方向微分の言葉で言い換えると,

$$\frac{f(\mathbf{0} + h\boldsymbol{e}_1) - f(\mathbf{0})}{h} = \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0$$

であることから $\boldsymbol{e}_1$ 方向微分可能で $Df(\mathbf{0}; \boldsymbol{e}_1) = \partial_x f(0, 0) = 0$. 一方,

$$\frac{f(0, 0 + k) - f(0, 0)}{k} = \frac{0 - 0}{k}$$

より, $k \to 0$ のとき極限が存在するので, y 方向について偏微分可能で

$$\partial_y f(0, 0) := \lim_{k \to 0} \frac{f(0, 0 + k) - f(0, 0)}{k} = 0.$$

方向微分の言葉で言い換えると,

$$\frac{f(\mathbf{0} + h\boldsymbol{e}_2) - f(\mathbf{0})}{h} = \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = 0$$

であることから $\boldsymbol{e}_2$ 方向微分可能で $Df(\mathbf{0}; \boldsymbol{e}_2) = \partial_y f(0, 0) = 0$. 次に $\boldsymbol{v} = (1, 1)$ 方向に沿っての方向微分を考えると

$$\frac{f(\mathbf{0} + h\boldsymbol{v}) - f(\mathbf{0})}{h} = \frac{f(0 + h, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = \frac{\sqrt{h^2} - 0}{h} = \frac{|h|}{h}$$

となり, $h \to 0 + 0$ のとき極限は 1, $h \to 0 - 0$ のとき極限は -1 より一致しないため, $h \to 0$ のとき極限は存在せず, $\boldsymbol{v}$ 方向について方向微分可能でない.

ここで, x 方向について偏微分可能であるという概念は言い換えると $\boldsymbol{e}_1$ 方向微分可能であるとなるが, 一般に方向微分の場合, 方向「偏」微分と呼ばず単に方向微分という.

定義 3. $\boldsymbol{a}=(a,b)$, $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2)$ とする．f は点 $\boldsymbol{a}$ において方向微分可能でさらに, f の点 $\boldsymbol{a}$ における $\boldsymbol{v}$ 方向微分

$$Df(\boldsymbol{a};\boldsymbol{v})$$

が $\boldsymbol{v}$ について線形の場合, すなわち, $\boldsymbol{w}=(w_1,w_2)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ に対して

$$Df(\boldsymbol{a};\alpha\boldsymbol{v}+\beta\boldsymbol{w})=\alpha Df(\boldsymbol{a};\boldsymbol{v})+\beta Df(\boldsymbol{a};\boldsymbol{w})$$

を満たすとき, f は点 $\boldsymbol{a}$ において Gâteaux 微分可能という．

ここで, 特に方向 $\boldsymbol{v}$ として $\boldsymbol{e}_1$ を選ぶと $Df(\boldsymbol{a};\boldsymbol{e}_1)=\partial_x f(\boldsymbol{a})$, $\boldsymbol{e}_2$ を選ぶと $Df(\boldsymbol{a};\boldsymbol{e}_2)=\partial_y f(\boldsymbol{a})$ であったことに注意する．一般にベクトル $\boldsymbol{v}:=(v_1,v_2)$ は $\boldsymbol{v}=v_1\boldsymbol{e}_1+v_2\boldsymbol{e}_2$ であったことから, 線形性を用いると

$$\begin{aligned}Df(\boldsymbol{a};\boldsymbol{v})&=Df(\boldsymbol{a};v_1\boldsymbol{e}_1+v_2\boldsymbol{e}_2)\\&=v_1Df(\boldsymbol{a};\boldsymbol{e}_1)+v_2Df(\boldsymbol{a};\boldsymbol{e}_2)\\&=v_1\partial_x f(\boldsymbol{a})+v_2\partial_y f(\boldsymbol{a})\\&=\big(\partial_x f(\boldsymbol{a}),\partial_y f(\boldsymbol{a})\big)\cdot\boldsymbol{v}\end{aligned}$$

つまり右辺の式のように偏微分を並べたベクトル $\nabla f(\boldsymbol{a}):=(\partial_x f(\boldsymbol{a}),\partial_y f(\boldsymbol{a}))$ との内積によってすべての方向微分 $Df(\boldsymbol{a};\boldsymbol{v})$ が表現されることが分かる．言い換えると, f が点 $\boldsymbol{a}$ において Gâteaux 微分可能 (すべての $\boldsymbol{v}$ 方向について微分可能) ならば $\boldsymbol{v}$ 方向微分の値 $Df(\boldsymbol{a};\boldsymbol{v})$ の $\boldsymbol{v}$ の依存性は, 偏微分を並べたベクトル $\nabla f(\boldsymbol{a}):=(\partial_x f(\boldsymbol{a}),\partial_y f(\boldsymbol{a}))$ と $\boldsymbol{v}$ との内積

$$Df(\boldsymbol{a};\boldsymbol{v})=\nabla f(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{v}$$

の形でかけていることが分かる．

f が点 $\boldsymbol{a}$ において Gâteaux 微分可能であるとき, このベクトル $\nabla f(\boldsymbol{a}):=(\partial_x f(\boldsymbol{a}),\partial_y f(\boldsymbol{a}))$ を f の点 $\boldsymbol{a}$ における Gâteaux 微分, または勾配とよぶ．$\nabla f(\boldsymbol{a})$ の他に $Df(\boldsymbol{a})$ や $\mathrm{d}f(\boldsymbol{a})$ とかくこともある．

例 3. [方向微分可能だが Gâteaux 微分可能でない例]

$$f(x,y):=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{if } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{if } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

実際, 方向 $\boldsymbol{v}:=(v_1,v_2)$ に対して,

$$\frac{f(\mathbf{0}+h\boldsymbol{v})-f(\mathbf{0})}{h}=\frac{f(0+hv_1,0+hv_2)-f(0,0)}{h}=\frac{h^2v_1v_2}{h^2(v_1^2+v_2^2)}=\frac{v_1v_2}{v_1^2+v_2^2}$$

であることから $h\to0$ のとき極限が存在し, f は方向微分可能で

$$Df(\mathbf{0};\boldsymbol{v})=\frac{v_1v_2}{v_1^2+v_2^2}=\frac{v_1v_2}{|\boldsymbol{v}|^2}.$$

しかし, 線形性は成立しない:

$$Df(\mathbf{0};\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=\frac{(v_1+w_1)(v_2+w_2)}{|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}|^2}\neq\frac{v_1v_2}{|\boldsymbol{v}|^2}+\frac{w_1w_2}{|\boldsymbol{w}|^2}=Df(\mathbf{0};\boldsymbol{v})+Df(\mathbf{0};\boldsymbol{w}).$$

例えば, もっと簡単に, $\partial xf(\mathbf{0})=Df(\mathbf{0};\boldsymbol{e}_1)=0$, $\partial yf(\mathbf{0})=Df(\mathbf{0};\boldsymbol{e}_2)=0$, しかし, $\boldsymbol{w}:=(1,1)=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$ について

$$Df(\mathbf{0};\boldsymbol{w})=\frac{w_1w_2}{|\boldsymbol{w}|^2}=\frac{1}{2}\neq0+0=Df(\mathbf{0};\boldsymbol{e}_1)+Df(\mathbf{0};\boldsymbol{e}_2).$$

定義 4. $\boldsymbol{a}=(a,b)$, $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2)$ とする．f は点 $\boldsymbol{a}$ において Gâteaux 微分可能でさらに,

$$\lim_{|\boldsymbol{v}|\to 0}\frac{|f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{v})-f(\boldsymbol{a})-\nabla f(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|}=0$$

を満たすとき, f は点 $\boldsymbol{a}$ において全微分可能, または Fréchet 微分可能という．

特に $\mathbb{R}^2$ の場合, これを言い換えると,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{|f(a+h,b+k)-f(a,b)-\partial_x f(\boldsymbol{a})h-\partial_y f(\boldsymbol{a})k|}{\sqrt{h^2+k^2}}=0.$$

または,

$$\varepsilon(h,k):=\frac{\big(f(a+h,b+k)-f(a,b)\big)}{\sqrt{h^2+k^2}}-\frac{\partial_x f(\boldsymbol{a})h+\partial_y f(\boldsymbol{a})k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

とおいたとき,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0.$$

または,

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)-\nabla f(\boldsymbol{a})\cdot(h,k)=o(\sqrt{h^2+k^2})$$

のように定義の書き換えができる．

方向微分では方向 $\boldsymbol{v}$ に対して極限の変数 h を 1 つとり $f(\boldsymbol{a}+h\boldsymbol{v})-f(\boldsymbol{a})$ によって差を取っていた．これは方向 $\boldsymbol{v}$ を決めたらその方向 (直線) に沿って**まっすぐに**極限を取っている．一方, 全微分 (Fréchet 微分) では, $\boldsymbol{v}$ そのものの長さ $|\boldsymbol{v}|$ を限り無く 0 に近づけているので, 自由に $\boldsymbol{a}$ に近づけることを意味する．すなわち, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{v}$ の $\boldsymbol{a}$ への収束は, 直線に沿ってでもいいし, 曲がりながらでもいいし, 渦を巻きながらでもいいことを意味する．

例 4. [Gâteaux 微分可能だが Fréchet 微分可能でない例]

$$f(x,y):=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{if } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{if } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

実際, 方向 $\boldsymbol{v}:=(v_1,v_2)$ に対して,

$$\frac{f(\mathbf{0}+h\boldsymbol{v})-f(\mathbf{0})}{h}=\frac{f(0+hv_1,0+hv_2)-f(0,0)}{h}=\frac{h^3v_1^2v_2}{h^4v_1^4+h^2v_2^2}=\frac{hv_1^2v_2}{h^2v_1^4+v_2^2}\to 0\quad(h\to 0)$$

であることから $h\to 0$ のとき極限が存在し, f は方向微分可能でさらに, $Df(\mathbf{0};\boldsymbol{v})=0$ より, $\boldsymbol{v}$ に関して線形である．　より詳細には

$$\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\frac{h^2\cdot 0}{h^4+0}=0,\quad \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\frac{0\cdot h}{0+h^2}=0,$$

よって, f は Gâteaux 微分可能．より細かく計算すると

$$\partial_x f(\mathbf{0})=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=0,\quad \partial_y f(\mathbf{0})=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=0,$$

$$Df(\mathbf{0};\boldsymbol{v})=0=\nabla f(\mathbf{0})\cdot\boldsymbol{v}=(0,0)\cdot\boldsymbol{v}.$$

言い換えれば原点を通るどの直線に沿って極限を計算しても傾きは 0 である．一方で, $y=x^2$ の曲線に沿って極限を計算してみる．つまり $\boldsymbol{v}:=(h,h^2)$ で $h\to 0$ を計算してみると

$$\begin{aligned}|f(\mathbf{0}+\boldsymbol{v})-f(\mathbf{0})-\nabla f(\mathbf{0})\cdot\boldsymbol{v}|&=\left|\frac{h^2h^2}{h^4+h^4}-0-(0,0)\cdot(h,h^2)\right|\\&=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

よって, $|\boldsymbol{v}| \to 0$ のとき, つまり $h \to 0$ のとき

$$\frac{|f(\mathbf{0}+\boldsymbol{v}) - f(\mathbf{0}) - \nabla f(\mathbf{0}) \cdot \boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{h^2+h^4}} = \frac{1}{2|h|\sqrt{1+h^2}} \to +\infty.$$

つまり

$$\lim_{|\boldsymbol{v}| \to 0} \frac{|f(\mathbf{0}+\boldsymbol{v}) - f(\mathbf{0}) - \nabla f(\mathbf{0}) \cdot \boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|} \neq 0$$

から f は Fréchet 微分可能でない.

注: 方向微分, Gâteaux 微分, Fréchet 微分の概念は $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ に限らず一般化できる.