直積空間に関する同型定理

2026 年 3 月 10 日

定理　X, Y を Banach 空間とし, その共役空間をそれぞれ X', Y' と表記する．直積空間 $X \times Y$ には

$$\big\|(x,y)\big\|_{X\times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y, \quad \big((x,y)\in X\times Y\big),$$

直積空間 $X' \times Y'$ には

$$\big\|(x^*,y^*)\big\|_{X'\times Y'} = \max\big\{\|x^*\|_{X'}, \|y^*\|_{Y'}\big\}, \quad \big((x^*,y^*)\in X'\times Y'\big)$$

でノルムをそれぞれ導入する．このとき, ある線形写像 $\tau : (X\times Y)' \to X'\times Y'$ が存在して τ は全単射かつ等長である, すなわち

$$\big\|\tau(T)\big\|_{X'\times Y'} = \|T\|_{(X\times Y)^*} \quad \textit{for all } T \in (X\times Y)'.$$

これにより, $(X\times Y)'$ は $X'\times Y'$ と同一視できる．

証明　$T \in (X\times Y)'$ とする．このとき, $T_X : X \to \mathbb{R}$, $T_Y : Y \to \mathbb{R}$ を

$$\begin{aligned} T_X(x) &:= \big\langle T, (x,0)\big\rangle_{(X\times Y)^*, X\times Y} \quad \text{for } x\in X, \\ T_Y(y) &:= \big\langle T, (0,y)\big\rangle_{(X\times Y)^*, X\times Y} \quad \text{for } y\in Y, \end{aligned}$$

で定義すると, T_X, T_Y はそれぞれ有界線形汎関数である．実際, 線形性は簡単に証明できる．有界性について, 任意の $x\in X$ に対して

$$\begin{aligned} \big|T_X(x)\big| &= \Big|\big\langle T, (x,0)\big\rangle_{(X\times Y)', X\times Y}\Big| \\ &\le \|T\|_{(X\times Y)'}\big\|(x,0)\big\|_{X\times Y} \\ &= \|T\|_{(X\times Y)'}\big\{\|x\|_X + \|0\|_Y\big\} \\ &= \|T\|_{(X\times Y)'}\|x\|_X \end{aligned}$$

より得られる．T_Y についても同様．よって, $T_x \in X'$, $T_y \in Y'$ が得られたので, 以後 $T_X(x)$ を $\langle T_X, x\rangle_{X',X}$, $T_Y(y)$ を $\langle T_Y, y\rangle_{Y',Y}$ と表記する．これらを用いて, $\tau : (X\times Y)' \to X'\times Y'$ を

$$\tau(T) := (T_X, T_Y)$$

で定義すると, この τ は線形で全単射であることが分かる．実際, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $S,T\in(X\times Y)'$ とすると

$$\begin{aligned} \big\langle(\alpha S+\beta T)_X, x\big\rangle_{X',X} &= \big\langle \alpha S+\beta T, (x,0)\big\rangle_{(X\times Y)', X\times Y} \\ &= \alpha\big\langle S, (x,0)\big\rangle_{(X\times Y)', X\times Y} + \beta\big\langle T, (x,0)\big\rangle_{(X\times Y)', X\times Y} \\ &= \alpha\langle S_X, x\rangle_{X',X} + \beta\langle T_X, x\rangle_{X',X}. \end{aligned}$$

よって, $(\alpha S+\beta T)_X=\alpha S_X+\beta T_X$ in X' が成立する. $(\alpha S+\beta T)_Y=\alpha S_Y+\beta T_Y$ in Y' も同様に証明できる. ゆえに直積空間での和と定数倍に注意して

$$\begin{aligned}\tau(\alpha S+\beta T)&=\big((\alpha S+\beta T)_X,(\alpha S+\beta T)_Y\big)\\&=(\alpha S_X+\beta T_X,\alpha S_Y+\beta T_Y)\\&=(\alpha S_X,\alpha S_Y)+(\beta T_X,\beta T_Y)\\&=\alpha(S_X,S_Y)+\beta(T_X,T_Y)\\&=\alpha\tau(S)+\beta\tau(T)\quad\text{in }X'\times Y'\end{aligned}$$

となり, τ は線形である. 次に全射であることを示す. $(x^*,y^*)\in X'\times Y'$ とする. ここで, $T:X\times Y\to\mathbb{R}$ を

$$T\big((x,y)\big):=\langle x^*,x\rangle_{X',X}+\langle y^*,y\rangle_{Y',Y}$$

で定義すると, T は有界線形汎関数となり, つまり, $T\in(X\times Y)'$ である. そして, この T に τ を作用させると, $\tau(T)=(T_X,T_Y)$ であるが

$$\begin{aligned}\langle T_X,x\rangle_{X',X}&=\big\langle T,(x,0)\big\rangle_{(X\times Y)',X\times Y}\\&=\langle x^*,x\rangle_{X',X}+\langle y^*,0\rangle_{Y',Y}\\&=\langle x^*,x\rangle_{X',X}\quad\text{for all }x\in X.\end{aligned}$$

すなわち, $T_X=x^*$ in X'. 同様に, $T_Y=y^*$ in Y' が証明できる. ゆえに

$$\tau(T)=(x^*,y^*)\quad\text{in }X'\times Y'.$$

すなわち, τ は全射である. 次に単射であることを示す. $T,S\in(X\times Y)'$ に対してもし, $\tau(T)-\tau(S)=(0,0)$ in $X'\times Y'$ ならば, τ の線形性より

$$\begin{aligned}(0,0)&=\tau(T)-\tau(S)\\&=\tau(T-S)\\&=\big((T-S)_X,(T-S)_Y\big)\\&=\Big(\big\langle T-S,(\cdot,0)\big\rangle_{(X\times Y)',X\times Y},\big\langle T-S,(0,\cdot)\big\rangle_{(X\times Y)',X\times Y}\Big),\end{aligned}$$

つまり, 任意の $x\in X$ に対して

$$\big\langle T-S,(x,0)\big\rangle_{(X\times Y)',X\times Y}=\langle 0,x\rangle_{X',X}=0,$$

任意の $y\in Y$ に対して

$$\big\langle T-S,(0,y)\big\rangle_{(X\times Y)',X\times Y}=\langle 0,y\rangle_{Y',Y}=0,$$

つまり,

$$\begin{aligned}\big\langle T-S,(x,y)\big\rangle_{(X\times Y)',X\times Y}&=\big\langle T-S,(x,0)\big\rangle_{(X\times Y)',X\times Y}+\big\langle T-S,(0,y)\big\rangle_{(X\times Y)',X\times Y}\\&=0.\end{aligned}$$

よって, $T-S=0$ in $(X\times Y)'$, すなわち, $T=S$ in $(X\times Y)'$ より τ は単射である.

最後に τ の等長性を示す. $T \in (X \times Y)'$ とする. T_X について

$$
\begin{aligned}
\|T_X\|_{X'} &= \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \le 1}} \left| \langle T_X, x \rangle_{X', X} \right| \\
&= \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \le 1}} \left| \langle T, (x, 0) \rangle_{(X \times Y)', X \times Y} \right| \\
&\le \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \le 1}} \|T\|_{(X \times Y)'} \big\|(x, 0)\big\|_{X \times Y} \\
&= \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \le 1}} \|T\|_{(X \times Y)'} \big\{ \|x\|_X + \|0\|_Y \big\} \\
&\le \|T\|_{(X \times Y)'}.
\end{aligned}
$$

同様に, $\|T_Y\|_{Y'} \le \|T\|_{(X \times Y)'}$. ゆえに

$$
\begin{aligned}
\big\|\tau(T)\big\|_{X' \times Y'} &= \big\|(T_X, T_Y)\big\|_{X' \times Y'} \\
&= \max\big\{ \|T_X\|_{X'}, \|T_Y\|_{Y'} \big\} \\
&\le \|T\|_{(X \times Y)'}.
\end{aligned}
$$

逆に,

$$
\begin{aligned}
\|T\|_{(X \times Y)'} &= \sup_{\substack{(x,y) \in X \times Y \\ \|x\|_X + \|y\|_Y \le 1}} \left| \big\langle T, (x, y) \big\rangle_{(X \times Y)', X \times Y} \right| \\
&= \sup_{\substack{(x,y) \in X \times Y \\ \|x\|_X + \|y\|_Y \le 1}} \left| \big\langle T, (x, 0) \big\rangle_{(X \times Y)', X \times Y} + \big\langle T, (0, y) \big\rangle_{(X \times Y)', X \times Y} \right| \\
&= \sup_{\substack{(x,y) \in X \times Y \\ \|x\|_X + \|y\|_Y \le 1}} \left| \langle T_X, x \rangle_{X', X} + \langle T_Y, y \rangle_{Y', Y} \right| \\
&\le \sup_{\substack{(x,y) \in X \times Y \\ \|x\|_X + \|y\|_Y \le 1}} \Big\{ \left| \langle T_X, x \rangle_{X', X} \right| + \left| \langle T_Y, y \rangle_{Y', Y} \right| \Big\} \\
&\le \sup_{\substack{(x,y) \in X \times Y \\ \|x\|_X + \|y\|_Y \le 1}} \Big\{ \|T_X\|_{X'} \|x\|_X + \big\|T_Y\big\|_{Y'} \big\|y\big\|_Y \Big\} \\
&\le \sup_{\substack{(x,y) \in X \times Y \\ \|x\|_X + \|y\|_Y \le 1}} \Big\{ \max\big\{ \|T_X\|_{X'}, \|T_Y\|_{Y'} \big\} \|x\|_X + \max\big\{ \|T_X\|_{X'}, \|T_Y\|_{Y'} \big\} \|y\|_Y \Big\} \\
&= \big\|\tau(T)\big\|_{X' \times Y'} \sup_{\substack{(x,y) \in X \times Y \\ \|x\|_X + \|y\|_Y \le 1}} \big\{ \|x\|_X + \|y\|_Y \big\} \\
&= \big\|\tau(T)\big\|_{X' \times Y'}.
\end{aligned}
$$

以上より τ は等長である. $\square$