# 線形補間について

2026 年 2 月 10 日

**定理** [3, p.19, Proposition 1.2.6] $X_i$, $Y_i$ を Banach 空間とし, $(X_i, Y_i)$ $(i = 1, 2)$ が補間対であると仮定する. $T$ が $T : X_1 \to X_2$ かつ $T : Y_1 \to Y_2$ とみて有界線形作用素であると仮定する. このとき, $\theta \in (0, 1)$, $p \in [1, \infty)$ に対して, $T$ は補間空間 $(X_1, Y_1)_{\theta,p}$ から $(X_2, Y_2)_{\theta,p}$ への有界線形作用素で, さらに任意の $u \in (X_1, Y_1)_{\theta,p}$ に対して

$$\|Tu\|_{(X_2,Y_2)_{\theta,p}} \le \|T\|^{1-\theta}_{\mathcal{L}(X_1,X_2)} \|T\|^{\theta}_{\mathcal{L}(Y_1,Y_2)} \|u\|_{(X_1,Y_1)_{\theta,p}}$$

を満たす.

**証明** $T = 0$ in $\mathcal{L}(Y_1, Y_2)$ のときには成立するので, $T \neq 0$ in $\mathcal{L}(Y_1, Y_2)$ と仮定する. $u \in (X_1, Y_1)_{\theta,p}$ とする. このとき任意の $a \in X_1$ と任意の $b \in Y_1$ で $u = a + b$ を満たすもの, そして任意の $t > 0$ に対して

$$\begin{aligned}
\|Ta\|_{X_2} + t\|Tb\|_{Y_2} &\le \|T\|_{\mathcal{L}(X_1,X_2)}\|a\|_{X_1} + t\|T\|_{\mathcal{L}(Y_1,Y_2)}\|b\|_{Y_1} \\
&\le \|T\|_{\mathcal{L}(X_1,X_2)} \left( \|a\|_{X_1} + t\frac{\|T\|_{\mathcal{L}(Y_1,Y_2)}}{\|T\|_{\mathcal{L}(X_1,X_2)}}\|b\|_{Y_1} \right)
\end{aligned}$$

より,

$$K(t, Tx, X_2, Y_2) \le \|T\|_{\mathcal{L}(X_1,X_2)} K\left( t\frac{\|T\|_{\mathcal{L}(Y_1,Y_2)}}{\|T\|_{\mathcal{L}(X_1,X_2)}}, u, X_1, Y_1 \right).$$

そこで, $s := (t\|T\|_{\mathcal{L}(Y_1,Y_2)})/\|T\|_{\mathcal{L}(X_1,X_2)}$ とみれば, $u \in (X_1, Y_1)_{\theta,p}$ より,

$$\int_0^\infty \Big( t^{-\theta} K(t, u, X_1, Y_1) \Big)^p \frac{dt}{t} < \infty.$$

このとき,

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \Big( t^{-\theta} K(t, Tu, X_2, Y_2) \Big)^p \frac{dt}{t} \\
&\le \int_0^\infty t^{-p\theta} \|T\|^p_{\mathcal{L}(X_1,X_2)} K\left(s, u, X_1, Y_1\right)^p \frac{dt}{t} \\
&= \|T\|^p_{\mathcal{L}(X_1,X_2)} \int_0^\infty \left( \frac{\|T\|_{\mathcal{L}(X_1,X_2)}}{\|T\|_{\mathcal{L}(Y_1,Y_2)}} s \right)^{-p\theta} K\left(s, u, X_1, Y_1\right)^p \frac{ds}{s} \\
&= \|T\|^p_{\mathcal{L}(X_1,X_2)} \frac{\|T\|^{-p\theta}_{\mathcal{L}(X_1,X_2)}}{\|T\|^{-p\theta}_{\mathcal{L}(Y_1,Y_2)}} \int_0^\infty \Big( s^{-\theta} K(s, u, X_1, Y_1) \Big)^p \frac{ds}{s}.
\end{aligned}$$

よって, $Tu \in (X_2, Y_2)_{\theta,p}$ でさらに

$$\|Tu\|_{(X_2,Y_2)_{\theta,p}} \le \|T\|^{1-\theta}_{\mathcal{L}(X_1,X_2)} \|T\|^{\theta}_{\mathcal{L}(Y_1,Y_2)} \|u\|_{(X_1,Y_1)_{\theta,p}}.$$

$\square$

## 参考文献


[1] 高村 幸男, 小西 芳雄, 非線型発展方程式, 岩波書店, 1977.

[2] 清水 扇丈, 朝倉数学ライブラリー 最大正則性定理, 朝倉書店, 2024.

[3] A. Lunardi, “*Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*”, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. Birkhäuser, 1995.