Banach 空間の和について

2026 年 2 月 5 日

定理 [1, pp.72–73] X, Y を Banach 空間とし, (X, Y) が補間対であると仮定する. すなわち, Hausdorff 線形位相空間 Z が存在して X, Y は共に Z へ連続的に埋め込まれるとする.

$$X + Y := \{v \in Z :^{\exists}\, x \in X, ^{\exists}\, y \in Y \ s.t.\ v = x + y\} \subset Z$$

で定義する. このとき,

$$\|v\|_{X+Y} := \inf_{\substack{v=x+y,\\ x\in X, y\in Y}} \{\|x\|_X + \|y\|_Y\}$$

と定義すると, $(X + Y, \|\cdot\|_{X+Y})$ は Banach 空間である.

証明 完備性を示す. $\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\|_{X+Y} < \infty$ を仮定し, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ が $X + Y$ で収束することを示せばよい. $n \in \mathbb{N}$ とすると, ノルムの定義より, ある $x_n \in X$ と $y_n \in Y$ が存在して, $v_n = x_n + y_n$ かつ

$$\|x_n\|_X + \|y_n\|_Y < \|v_n\|_{X+Y} + \frac{1}{2^n}.$$

このとき,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_X \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\|_{X+Y} + 1$$

より, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ は絶対収束する. 同様に $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ も絶対収束するので, $x := \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ in X, $y := \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ in Y とおく. このとき, (X, Y) が補間対であることから, $N \to \infty$ とすると

$$\sum_{n=1}^{N} x_n \to x \quad \text{in } Z, \quad \sum_{n=1}^{N} y_n \to y \quad \text{in } Z$$

が共に成立する. よって, $v := x + y$ in Z が定義でき, さらに

$$(x + y) - \sum_{n=1}^{N} (x_n + y_n) = \sum_{n=N+1}^{\infty} (x_n + y_n) \quad \text{in } Z$$

も成立する. $\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\|_{X+Y} < \infty$ より

$$\begin{aligned} \left\| v - \sum_{n=1}^{N} v_n \right\|_{X+Y} &= \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} (x_n + y_n) \right\|_{X+Y} \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \|x_n + y_n\|_{X+Y} \\ &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \|v_n\|_{X+Y} \to 0 \quad (N \to \infty). \end{aligned}$$

ゆえに, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ が $X + Y$ で v に収束する. □

参考文献

[1] 清水 扇丈, 朝倉数学ライブラリー 最大正則性定理, 朝倉書店, 2024.