完備性と絶対収束級数の収束性について

2026 年 2 月 5 日

定理　ノルム空間 $(X, \|\cdot\|_X)$ において, 次の 2 条件は同値である:

(1) X の任意の Cauchy 列が収束する (完備性).

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_X < \infty$ ならば $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ が X で収束する (絶対収束する級数は必ず収束する).

証明　(1) ならば (2) を示す. $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_X < \infty$ とする. $\{\sum_{n=1}^{N} \|x_n\|_X\}_{N\in\mathbb{N}}$ は $\mathbb{R}$ で収束列であり, Cauchy 列なので $M, N \in \mathbb{N}$ を $N, M \to \infty$ とすれば

$$\left| \sum_{n=1}^{N} \|x_n\|_X - \sum_{n=1}^{M} \|x_n\|_X \right| \to 0.$$

ゆえに, $S_N := \sum_{n=1}^{N} x_n$ とおくと

$$\begin{aligned}
\|S_N - S_M\|_X &= \left\| \sum_{n=m+1}^{N} x_n \right\|_X \\
&\le \sum_{n=M+1}^{N} \|x_n\|_X \\
&= \sum_{n=1}^{N} \|x_n\|_X - \sum_{n=1}^{M} \|x_n\|_X \\
&= \left| \sum_{n=1}^{N} \|x_n\|_X - \sum_{n=1}^{M} \|x_n\|_X \right| \to 0.
\end{aligned}$$

よって, $\{S_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ は X で Cauchy 列である. 仮定 (1) より, $\{S_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ は $S \in X$ に X で収束する.

(2) ならば (1) を示す. $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を X の Cauchy 列とする. Cauchy 列の定義から, ある $n_1 \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $m, n \in \mathbb{N}$: $m, n \ge n_1$ に対して

$$\|y_n - y_m\| < \frac{1}{2}.$$

次に, ある $n_2 \in \mathbb{N}$: $n_2 > n_1$ が存在して, 任意の $m, n \in \mathbb{N}$: $m, n \ge n_2$ に対して

$$\|y_n - y_m\| < \frac{1}{2^2}.$$

これを繰り返し, 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して, ある $n_k \in \mathbb{N}$ が $n_k > n_{k-1} > n_{k-2} > \cdots > n_1$ を満たすように取れて, 任意の $m, n \in \mathbb{N}$: $m, n \ge n_k$ に対して

$$\|y_n - y_m\| < \frac{1}{2^k}.$$

このとき, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列 $\{y_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ は

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|y_{n_{k+1}} - y_k\|_X < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 < \infty$$

を満たす．そこで，$x_k := y_{n_{k+1}} - y_{n_k}$ とおくと，$\sum_{k=1}^\infty \|x_k\|_X < \infty$ より，仮定 (2) から $\sum_{k=1}^\infty x_k$ はある $s \in X$ に X で収束する．$K \in \mathbb{N}$ とすると

$$y_{n_{K+1}} = y_{n_1} + \sum_{k=1}^{K}(y_{n_{k+1}} - y_{n_k}) = y_{n_1} + \sum_{k=1}^{K} x_k$$

より $K \to +\infty$ とすれば

$$y_{n_{K+1}} \to y_{n_1} + s \quad \text{in } X.$$

部分列 $\{y_{n_K}\}_{K\in\mathbb{N}}$ がこの $y := y_{n_1} + s \in X$ に X で収束することが得られた．最後に $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $y \in X$ へ収束することを示す．$\varepsilon > 0$ とすると，ある，$N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $m, n \in \mathbb{N}$: $n > m \geq N_1$ に対して

$$\|y_n - y_m\|_X < \frac{\varepsilon}{2}.$$

先の部分列が収束するので，ある $N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $k \in \mathbb{N}$: $k \geq N_2$ に対して

$$\|y_{n_k} - y\|_X < \frac{\varepsilon}{2}.$$

ゆえに $N_\varepsilon := \max\{N_1, N_2\}$ とおくと，部分列の性質から $n_{N_\varepsilon} \geq N_\varepsilon$ なので，任意の $n \geq N_\varepsilon$ に対して

$$\begin{aligned}\|y_n - y\|_X &\leq \|y_n - y_{n_{N_\varepsilon}}\|_X + \|y_{N_\varepsilon} - y\|_X \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

以上より，X の任意の Cauchy 列が収束する． □

参考文献

[1] 黒田 成俊, 関数解析, 共立出版株式会社, 1980.