# 行列の三角化

2024 年 10 月 18 日

**定理 1.** [2, p.122, 定理 6.3.2.] $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ とする．$A$ の固有値がすべて実数ならば, $A$ は直交行列を用いて上三角化できる．すなわち, 次のような直交行列 $P$ が存在する．

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & & * \\ 0 & 0 & \lambda_3 & & * \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

**証明**　$n$ に関する数学的帰納法で示す．$k=1$ のとき, $A=(\lambda_1)$, (言い換えれば $A:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が線形) ならば, $Ax := \lambda_1 x$ であるので, 固有値の定義より, 例えば $q_1 := 1$ とすれば

$$Aq_1 = \lambda_1 q_1$$

を満たすので $\lambda_1$ 自身が固有値であり, $P = P^{-1} = I$ によってすでに主張は成立している．

次に $k=n-1$ のときに主張が成立しているとする．$k=n$ のとき, $\lambda_1$ を $A$ の固有値, $\boldsymbol{q}_1$ を固有ベクトルで, さらに $|\boldsymbol{q}_1|=1$ を仮定する (もしそうでなければ $\boldsymbol{q}_1/|\boldsymbol{q}_1|$ をあらためて $\boldsymbol{q}_1$ とおけば長さを 1 にできる)．ここで, $\boldsymbol{q}_1$ を含む正規直交基底の 1 つを

$$\{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \ldots, \boldsymbol{q}_n\}$$

とおき,

$$Q := [\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \ldots, \boldsymbol{q}_n] = \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{2,1} & \cdots & q_{n,1} \\ q_{1,2} & q_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ q_{1,n} & q_{2,n} & \cdots & q_{n,n} \end{pmatrix}$$

とする．ただし, $\boldsymbol{q}_i = (q_{i,1}, q_{i,2}, \ldots, q_{i,n})^{\mathsf{T}}$．このとき,

$$\begin{aligned} Q^{\mathsf{T}}Q &= \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & \cdots & q_{1,n} \\ q_{2,1} & q_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ q_{n,1} & q_{n,2} & \cdots & q_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{2,1} & \cdots & q_{n,1} \\ q_{1,2} & q_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ q_{1,n} & q_{2,n} & \cdots & q_{n,n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_1\cdot\boldsymbol{q}_1 & \boldsymbol{q}_1\cdot\boldsymbol{q}_2 & \cdots & \boldsymbol{q}_1\cdot\boldsymbol{q}_n \\ \boldsymbol{q}_2\cdot\boldsymbol{q}_1 & \boldsymbol{q}_2\cdot\boldsymbol{q}_2 & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \boldsymbol{q}_n\cdot\boldsymbol{q}_1 & \boldsymbol{q}_n\cdot\boldsymbol{q}_2 & \cdots & \boldsymbol{q}_n\cdot\boldsymbol{q}_n \end{pmatrix} = I \end{aligned}$$

より $Q$ は直交行列である. また, $A\boldsymbol{q}_1=\lambda_1\boldsymbol{q}_1$, および $\boldsymbol{q}_i\cdot\boldsymbol{q}_j=\delta_{ij}$(クロネッカーのデルタ) に注意すると

$$
\begin{aligned}
Q^{-1}AQ &= Q^{\mathsf{T}}A[\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\ldots,\boldsymbol{q}_n]\\
&= Q^{\mathsf{T}}[A\boldsymbol{q}_1,A\boldsymbol{q}_2,\ldots,A\boldsymbol{q}_n]\\
&= \begin{bmatrix}\boldsymbol{q}_1\\ \boldsymbol{q}_2\\ \cdots\\ \boldsymbol{q}_n\end{bmatrix}[\lambda_1\boldsymbol{q}_1,A\boldsymbol{q}_2,\ldots,A\boldsymbol{q}_n]\\
&= \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & \cdots & q_{1,n}\\ q_{2,1} & q_{2,2} & & \vdots\\ \vdots & & & \vdots\\ q_{n,1} & q_{n,2} & \cdots & q_{n,n}\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \lambda_1 q_{1,1} & \sum_{j=1}^n a_{1,j}q_{2,j} & \cdots & \sum_{j=1}^n a_{1,j}q_{n,j}\\ \lambda_1 q_{1,2} & \sum_{j=1}^n a_{2,j}q_{2,j} & & \vdots\\ \vdots & & & \vdots\\ \lambda_1 q_{1,n} & \sum_{j=1}^n a_{n,j}q_{2,j} & \cdots & \sum_{j=1}^n a_{n,j}q_{n,j}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1\boldsymbol{q}_1\cdot\boldsymbol{q}_1 & * & \cdots & *\\ \lambda_1\boldsymbol{q}_2\cdot\boldsymbol{q}_1 & & & \\ \vdots & & B & \\ \lambda_1\boldsymbol{q}_n\cdot\boldsymbol{q}_1 & & & \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & *\\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

ただし, $B$ は $(n-1)$ 次正方行列. 数学的帰納法の仮定より, ある直交行列 $R\in\mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ が存在して

$$
R^{-1}BR=\begin{pmatrix} \lambda_2 & * & * & \cdots & *\\ 0 & \lambda_3 & * & & *\\ 0 & 0 & \lambda_4 & & *\\ \vdots & & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}
$$

と上三角化できる. よって

$$
P:=Q\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & & & \\ \vdots & & R & \\ 0 & & & \end{pmatrix}
$$

とおくと

$$
P^{\mathsf{T}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & & & \\ \vdots & & R & \\ 0 & & & \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} Q^{\mathsf{T}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & & & \\ \vdots & & R^{\mathsf{T}} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} Q^{\mathsf{T}}
$$

に注意すれば

$$
P^{\mathsf{T}}P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & & & \\ \vdots & & R^{\mathsf{T}} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} Q^{\mathsf{T}}Q\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & & & \\ \vdots & & R & \\ 0 & & & \end{pmatrix}=I
$$

より $P$ は直交行列である．さらに

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP &= P^{\mathsf{T}}AP \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & R^{\mathsf{T}} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} Q^{\mathsf{T}}AQ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & R & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & R^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & R & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & R^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & BR & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & R^{-1}BR & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & & * \\ 0 & 0 & \lambda_3 & & * \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

以上から, 数学的帰納法により主張が成立. □

**定義 2.** $V$ を $n$ 次元, $W$ を $m$ 次元実線形空間とする．$\mathcal{A} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $\mathcal{B} := \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ をそれぞれ $V$ や $W$ の基底とする．すなわち任意の $v \in V$ に対して一意的に $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ が存在して

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$$

と表現できる．$\psi_{\mathcal{A}} : V \to \mathbb{R}^n$ を

$$\psi_{\mathcal{A}}(v) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^{\mathsf{T}}$$

で定義すれば, $\psi_{\mathcal{A}}$ は全単射である．そこで, $\varphi_{\mathcal{A}} : \mathbb{R}^n \to V$ を $\varphi_{\mathcal{A}} := \psi_{\mathcal{A}}^{-1}$ で定義すれば, $\varphi_{\mathcal{A}}$ も全単射であり

$$\varphi_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{e}_i) = v_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\varphi_{\mathcal{A}}^{-1}(v) = \psi_{\mathcal{A}}(v) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^{\mathsf{T}}$$

を満たす．ここで, $F : V \to W$ を線形写像とすると $\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} F \varphi_{\mathcal{A}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ は $m \times n$ 行列とみなせる．この $m \times n$ 行列を, $V$ の基底 $\mathcal{A}$ と $W$ の基底 $\mathcal{B}$ に関する $F$ の表現行列とよぶ.

**定理 3.** [1, pp.258–259, 定理 8.1] $V$ を $n$ 次元実線形空間, $F : V \to V$ を線形写像とし, (重複度まで考慮して)$n$ 個の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ を持つとする．このとき, ある $V$ の基底 $\mathcal{A}$ が存在

して, $V$ の基底 $\mathcal{A}$ に関する $F$ の表現行列は

$$\varphi_{\mathcal{A}}^{-1}F\varphi_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & & * \\ 0 & 0 & \lambda_3 & & * \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

となる.

**証明**　$n$ に関する数学的帰納法で示す. $k = 1$ のとき, ある $v_1 \in V$; $v_1 \neq 0$ が存在して $V := \{rv_1 : r \in \mathbb{R}\}$ である. このとき $F : V \to V$ が線形ならば, 任意の $v = rv_1 \in V(r \neq 0)$ に対して

$$w := Fv$$

とおくと, $w = sv_1$ と表現できるので

$$sv_1 = F(rv_1) = rFv_1$$

すなわち $\lambda_1 := s/r$ とおくと, $\lambda_1$ は $F$ の固有値で $v_1 \neq 0$ が対応する固有ベクトルなる. この場合, $\mathcal{A} := \{v_1\}$ として, $\varphi_{\mathcal{A}}(1) = v_1$, $\varphi_{\mathcal{A}}^{-1}(\lambda_1 v_1) = \lambda_1$ であり $\varphi_{\mathcal{A}}^{-1}F\varphi_{\mathcal{A}} = \lambda_1$ によって主張は成立している.

次に $k = n-1$ のときに主張が成立しているとする. $k = n$ のとき, $\lambda_1$ を $F$ の固有値, $v_1 \in V$; $v_1 \neq 0$ を固有ベクトルとする. すなわち

$$Fv_1 = \lambda_1 v_1.$$

ここで, $V$ は $n$ 次元線形空間なので, $n$ 個の基底を持つが, $v_1$ を含む基底に取り替えることができるので, その 1 つを

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

とおく. そこで, $v_1$ を除いた $n-1$ 個の $v_2, \ldots, v_n$ によって生成される $n-1$ 次元の部分空間を $W$ とおくと,

$$V = \{rv_1 : r \in \mathbb{R}\} \oplus W$$

である. つまり任意の $v \in V$ に対して, ある $c \in \mathbb{R}$ と $\tilde{w} \in W$ が一意的に存在して

$$v = cv_1 + \tilde{w}$$

とかける. そこで, 任意の $w \in W$ に対して $0v_1 + w \in V$ より, この $0v_1 + w \in V$ に対しても, ある $c \in \mathbb{R}$ と $\tilde{w} \in W$ が一意的に存在して

$$F(0v_1 + w) = cv_1 + \tilde{w}$$

を満たす. そこで $F_1 : W \to W$ を

$$F_1 w := \tilde{w}$$

で定義すると, 任意の $x, y \in W$ に対してある $c_x, c_y \in \mathbb{R}$ と $\tilde{x}, \tilde{y} \in W$ が一意的に存在して

$$F(0v_1 + x) = c_x v_1 + \tilde{x}, \quad F(0v_1 + y) = c_y v_1 + \tilde{y}$$

が成立するので, 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して

$$aF_1 x = a\tilde{x} = aF(0v_1 + x) - ac_x v_1, \quad bF_1 y = b\tilde{y} = bF(0v_1 + y) - bc_y v_1,$$

$$
\begin{aligned}
aF_1x + bF_1y &= aF(0v_1 + x) - ac_xv_1 + bF(0v_1 + y) - bc_yv_1 \\
&= F(0v_1 + (ax + by)) - (ac_x + bc_y)v_1 \\
&= F_1(ax + by)
\end{aligned}
$$

より $F_1 : W \to W$ は線形写像である．さらに

$$
F(0v_1 + w) = F_1(w)
$$

が任意の $w \in W$ に対して成立するので $W$ 上においては $F$ と $F_1$ は同一視できる．そこで $W$ の基底となっている $\mathcal{B} := \{v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ に関する $F_1$ の表現行列を

$$
\phi_{\mathcal{B}}^{-1} F_1 \phi_{\mathcal{B}} = A_1
$$

おく．ただし, $\phi_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}^{n-1} \to W$ に注意する．このとき, 基底 $\mathcal{C} := \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ に関する $F$ の表現行列は

$$
A := \varphi_{\mathcal{C}}^{-1} F \varphi_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \tag{1}
$$

となる．実際, $V = \{rv_1 : r \in \mathbb{R}\} \oplus W$ であったので $\varphi_{\mathcal{C}}^{-1} F \varphi_{\mathcal{C}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ とみて

$$
\begin{aligned}
\varphi_{\mathcal{C}}^{-1} F \varphi_{\mathcal{C}} \boldsymbol{x} &= \varphi_{\mathcal{C}}^{-1} F \left( x_1v_1 + \sum_{k=2}^{n} x_kv_k \right) \\
&= \varphi_{\mathcal{C}}^{-1} \left( x_1Fv_1 + \sum_{k=2}^{n} x_kFv_k \right) \\
&= \varphi_{\mathcal{C}}^{-1} \left( x_1\lambda_1v_1 + \sum_{k=2}^{n} x_kF_1v_k \right) \\
&= \varphi_{\mathcal{C}}^{-1} \left( \lambda_1(x_1v_1) + F_1 \left( \sum_{k=2}^{n} x_kv_k \right) \right) \\
&= \left( \lambda_1, \phi_{\mathcal{B}}^{-1} F_1 \left( \sum_{k=2}^{n} x_kv_k \right) \right),
\end{aligned}
$$

ただし, $\boldsymbol{x} := (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathsf{T}}$ で, さらに

$$
\begin{aligned}
\varphi_{\mathcal{C}} \boldsymbol{x} &= x_1v_1 + (x_2v_2 + \cdots + x_nv_n) \\
&= x_1v_1 + \phi_{\mathcal{B}}(x_2, x_3, \ldots, x_n)^{\mathsf{T}} \\
&\in \{rv_1 : r \in \mathbb{R}\} + W
\end{aligned}
$$

に注意して (1) を得る．よって行列 $A$ の固有多項式は

$$
f_A(x) = \det(xI - A) = (x - \lambda_1) f_{A_1}(x)
$$

となる．一方, $F$ は (重複度まで考慮して)$n$ 個の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ を持つと仮定していたので,

$$
f_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n)
$$

であるから

$$
f_{A_1}(x) = (x - \lambda_2)(x - \lambda_3) \cdots (x - \lambda_n)
$$

すなわち, 線形写像 $F_1 : W \to W$ は $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ を固有値に持つ. 数学的帰納法の仮定より, ある $W$ の基底 $\mathcal{D} := \{w_2, w_3, \dots, w_n\}$ が存在して

$$\phi_{\mathcal{D}}^{-1} F_1 \phi_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & * & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_3 & * & & * \\ 0 & 0 & \lambda_4 & & * \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

と上三角行列で表現できる. ただし, $\phi_{\mathcal{D}} : \mathbb{R}^{n-1} \to W$ に注意する. このとき $R := \phi_{\mathcal{B}}^{-1} \phi_{\mathcal{D}} : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$ は基底 $\mathcal{D}$ から $\mathcal{B}$ への基底変換行列となる. 最後に, 基底 $\mathcal{A}$ を

$$\varphi_{\mathcal{A}} = \varphi_{\mathcal{C}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & R & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

を満たすように取れば.

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{A}}^{-1} F \varphi_{\mathcal{A}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & R^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \varphi_{\mathcal{C}}^{-1} F \varphi_{\mathcal{C}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & R & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & R^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & R & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & \phi_{\mathcal{D}}^{-1} \phi_{\mathcal{B}} A_1 \phi_{\mathcal{B}}^{-1} \phi_{\mathcal{D}} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & \phi_{\mathcal{D}}^{-1} F_1 \phi_{\mathcal{D}} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & & * \\ 0 & 0 & \lambda_3 & & * \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

以上から, 数学的帰納法により主張が成立. □

## 参考文献


[1] 松坂 和夫, 数学入門シリーズ 線型代数入門, 新装版, 岩波書店, 2022.

[2] 三宅 敏恒, 線形代数学 初歩からジョルダン標準形へ, 培風館, 2008.