L^p 空間の補間不等式

2024 年 10 月 17 日

定理　$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ とし, $0 < p < r < \infty$ とする．もし, $f \in L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ ならば, $f \in L^q(\Omega)$ でさらに

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} \le \|f\|_{L^p(\Omega)}^{1-\theta} \|f\|_{L^r(\Omega)}^{\theta},$$

ただし, $0 \le \theta \le 1$ は以下を満たす数である:

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{r}.$$

証明　　指数の等式を q 倍すれば以下の通り変形できる:

$$1 = \frac{1}{\frac{p}{q(1-\theta)}} + \frac{1}{\frac{r}{q\theta}}.$$

よって, Hörder の不等式より

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left|f(x)\right|^q dx &= \int_\Omega \left|f(x)\right|^{q(1-\theta)} \left|f(x)\right|^{q\theta} dx \\
&\le \left\{ \int_\Omega \left|f(x)\right|^{q(1-\theta)\cdot \frac{p}{q(1-\theta)}} \right\}^{\frac{q(1-\theta)}{p}} \left\{ \int_\Omega \left|f(x)\right|^{q\theta \cdot \frac{r}{q\theta}} \right\}^{\frac{q\theta}{r}} \\
&= \|f\|_{L^p(\Omega)}^{q(1-\theta)} \|f\|_{L^q(\Omega)}^{q\theta} \\
&< +\infty.
\end{aligned}$$

以上より, $f \in L^q(\Omega)$ でさらに

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} \le \|f\|_{L^p(\Omega)}^{1-\theta} \|f\|_{L^r(\Omega)}^{\theta}.$$

$\square$