令和7年度 位相入門I 小テスト

数理・知能・電子・機械・応化・環境　課程 ＿＿＿ 回生　　学生番号 ＿＿＿＿＿＿＿　名前 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ $E \subset \mathbb{R}$ を空でない有界な集合とする. β を E の最大下界 $\inf E$ とおくと, その言葉の定義から β は次の 2 つの条件を満たすことを証明せよ:

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad {}^\forall x \in E, \quad x \geq \beta; \\ \text{(ii)} \quad {}^\forall \varepsilon > 0, {}^\exists x_\varepsilon \in E \quad \text{s.t.} \quad \beta + \varepsilon > x_\varepsilon. \end{cases}$$

$\boxed{2}$ $A, B \subset \mathbb{R}$ を空でない有界な集合とする. 次を証明せよ.

(1) $A \subset B$ ならば $\sup A \leq \sup B$.

(2) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

(3) ${}^\forall a \in A, {}^\exists b_a \in B$ s.t. $a \leq b_a$ が成立するならば

$$\sup A \leq \sup B.$$

$\boxed{3}$ $\{a_n\}, \{b_n\}$ を数列とする． $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ ならば

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$$

であることを ε-N 論法で証明せよ.

$\boxed{4}$ 一般項が

$$a_n := \frac{1}{n^2}$$

で与えられた数列が 0 へ収束することを ε-N 論法で証明せよ.

$\boxed{5}$ $X = \mathbb{R}^3$ とする． $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3) \in X$ に対して,

$$d_\infty(a, b) := \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, |a_3 - b_3|\}$$

と定義する (チェビシェフ距離, (ℓ^∞) 距離). X の 3 点を $a = (0, 0, 0)$, $b = (1, 2, 4)$, $c = (3, 5, 6)$ とすると, $d_\infty(a, b)$, $d_\infty(b, c)$, $d_\infty(a, c)$ をそれぞれ求めよ.

$\boxed{6}$ $X = \mathbb{R}^2$ とする． $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2) \in X$ に対して,

$$d_1(a, b) := |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$$

と定義する (マンハッタン距離, (ℓ^1) 距離). d_1 は X の距離であることを証明せよ.