

令和7年度 位相入門I 小テスト対策 No.2

数理・知能・電子・機械・応化・環境 課程 _____ 回生 _____

学生番号 _____ 名前 _____

1 $E \subset \mathbb{R}$ を空でない有界な集合とする. α が次の2つの条件を満たすならば $\alpha = \sup E$ であることを証明せよ:

$$\begin{cases} \text{(i)} & \forall x \in E, \quad x \leq \alpha; \\ \text{(ii)} & \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in E \quad \text{s.t.} \quad \alpha - \varepsilon < x_\varepsilon. \end{cases}$$

2 $A, B \subset \mathbb{R}$ を空でない有界な集合とする. 次を証明せよ.

- (1) $A \subset B$ ならば $\sup A \leq \sup B$.
- (2) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.
- (3) $E := \{x + y : x \in A, y \in B\}$ とおく. このとき,

$$\inf E \geq \inf A + \inf B.$$

3 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を数列とする. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ ならば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \alpha - \beta$$

であることを ε - N 論法で証明せよ.

4 一般項が

$$a_n := \frac{2}{n}$$

で与えられた数列が 0 へ収束することを ε - N 論法で証明せよ.

5 $X = \mathbb{R}^2$ とする. $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in X$ に対して,

$$d_\infty(a, b) := \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}$$

と定義する (チェビシェフ距離, (ℓ^∞) 距離). X の 3 点を $a = (0, 0), b = (1, 2), c = (3, 5)$ とすると, $d_\infty(a, b), d_\infty(b, c), d_\infty(a, c)$ をそれぞれ求めよ.

6 $X := \{\text{大阪, 高槻, 京都, 瀬田}\}$ とする. それぞれ JR の駅を表すとし, その間の運賃は以下の通りとする.

A \ B	大阪	高槻	京都	瀬田
大阪	0	290	580	960
高槻	290	0	410	660
京都	580	410	0	320
瀬田	960	660	320	0

$A, B \in X$ に対して $d(A, B)$ を上記表の値とする. d は X 上の距離にはならないことを証明せよ.