令和7年度 位相入門I 小テスト対策 No.2

数理・知能・電子・機械・応化・環境　課程　_____　回生　　学生番号 _______________　名前 ____________________

$\boxed{1}$ $E \subset \mathbb{R}$ を空でない有界な集合とする．α が次の 2 つの条件を満たすならば $\alpha = \sup E$ であることを証明せよ:

$$\begin{cases} \text{(i)} & {}^\forall x \in E, \quad x \leq \alpha; \\ \text{(ii)} & {}^\forall \varepsilon > 0, {}^\exists x_\varepsilon \in E \quad \text{s.t.} \quad \alpha - \varepsilon < x_\varepsilon. \end{cases}$$

解答例　(i) は α が E の上界であることの定義そのものである．後は α が E の上界の中で最小であることを背理法で示す．もし α より小さな E の上界 α_0 が存在したとする．このとき

$$\alpha_0 < \alpha, \quad \text{でさらに} \quad {}^\forall x \in E, x \leq \alpha_0$$

を満たす．よって，$\varepsilon := \alpha - \alpha_0$ とおくと，$\varepsilon > 0$ であるので，条件 (ii) より ${}^\exists x_\varepsilon \in E$ s.t.

$$\alpha - \varepsilon < x_\varepsilon.$$

ここで，$\varepsilon = \alpha - \alpha_0$ を代入すると

$$\alpha - (\alpha - \alpha_0) < x_\varepsilon$$

となるが，これから $\alpha_0 < x_\varepsilon$ となり，α_0 が E の上界であったことに矛盾する．よって，α は E の最小上界である．□

$\boxed{2}$ $A, B \subset \mathbb{R}$ を空でない有界な集合とする．次を証明せよ．

(1) $A \subset B$ ならば $\sup A \leq \sup B$.

(2) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

(3) $E := \{x + y : x \in A, y \in B\}$ とおく．このとき，

$$\inf E \geq \inf A + \inf B.$$

解答例　(1) $\alpha = \sup B$ とおく．最小上界の定義より，

$${}^\forall x \in B, \quad x \leq \alpha.$$

ここで，$y \in A$ とする．仮定より $y \in B$ なので，

$$y \leq \alpha.$$

つまり，α は A の上界の 1 つである．一方，$\sup A$ は A の最小上界なので

$$\sup A \leq \alpha = \sup B.$$

□

(2) ($\geq$) を示す．$A \subset A \cup B$ より，(1) を用いれば

$$\sup A \leq \sup(A \cup B).$$

同じく，$B \subset A \cup B$ より，

$$\sup B \leq \sup(A \cup B).$$

ゆえに

$$\sup(A \cup B) \geq \max\{\sup A, \sup B\}$$

を得る．

($\leq$) を示す．$\alpha := \sup A, \beta := \sup B$ とおく．sup の定義より，

$$\begin{aligned} {}^\forall x \in A, \quad x \leq \alpha \leq \max\{\alpha, \beta\} = \max\{\sup A, \sup B\}, \\ {}^\forall y \in B, \quad y \leq \beta \leq \max\{\alpha, \beta\} = \max\{\sup A, \sup B\}. \end{aligned}$$

よって，$z \in A \cup B$ とすると，和集合の定義より $z \in A$ または $z \in B$ である．

(i) $z \in A$ のとき，$z \leq \alpha \leq \max\{\sup A, \sup B\}$.

(ii) $z \in B$ のとき，$z \leq \beta \leq \max\{\sup A, \sup B\}$.

ゆえに，$\max\{\sup A, \sup B\}$ は $A \cup B$ の上界の 1 つである．$\sup(A \cup B)$ は $A \cup B$ の最小上界なので，

$$\sup(A \cup B) \leq \max\{\sup A, \sup B\}.$$

以上より等号が成立する．□

(3) E の定義から，$z \in E$ とすると，${}^\exists x_z \in A$, ${}^\exists y_z \in B$ s.t.

$$z = x_z + y_z$$

とかけている．いま，$\alpha := \inf A$, $\beta := \inf B$ とおくと inf の定義より

$$x_z \geq \alpha, \quad y_z \geq \beta$$

を満たす．よって

$$z = x_z + y_z \geq \alpha + \beta$$

を満たす．z は任意に選べるので，これは $\alpha + \beta$ が E の下界の 1 つであることを意味する．一方，$\inf E$ は E の最大下界なので

$$\inf E \geq \alpha + \beta = \inf A + \inf B.$$

□

$\boxed{3}$ $\{a_n\}, \{b_n\}$ を数列とする．$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ ならば

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \alpha - \beta$$

であることを ε-N 論法で証明せよ．

解答例　${}^\forall\varepsilon > 0, {}^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$${}^\forall n \geq N_\varepsilon, \quad |(a_n - b_n) - (\alpha - \beta)| < \varepsilon$$

を示す．$\varepsilon > 0$ とする．仮定より ${}^\exists N_\alpha, N_\beta \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\begin{aligned} {}^\forall n \geq N_\alpha, &\quad |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ {}^\forall n \geq N_\beta, &\quad |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

ここで, $N_\varepsilon := \max\{N_\alpha, N_\beta\}$ とおけば, ${}^\forall n \geq N_\varepsilon$,

$$\begin{aligned} |(a_n - b_n) - (\alpha - \beta)| &= |a_n - \alpha + \beta - b_n| \\ &\leq |a_n - \alpha| + |\beta - b_n| \\ &= |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

以上より, $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \alpha - \beta$. □

$\boxed{4}$ 一般項が

$$a_n := \frac{2}{n}$$

で与えられた数列が 0 へ収束することを ε-N 論法で証明せよ．

解答例　${}^\forall\varepsilon > 0, {}^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$${}^\forall n \geq N_\varepsilon, \quad \left|\frac{2}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

を示す．$\varepsilon > 0$ とする．アルキメデスの原理より, ${}^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\frac{2}{\varepsilon} < N_\varepsilon.$$

このとき,

$$\frac{2}{N_\varepsilon} < \varepsilon.$$

よって, ${}^\forall n \geq N_\varepsilon$,

$$\begin{aligned} \left|\frac{2}{n} - 0\right| &= \frac{2}{n} \\ &\leq \frac{2}{N_\varepsilon} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

以上より, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. □

$\boxed{5}$ $X = \mathbb{R}^2$ とする．$a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2) \in X$ に対して,

$$d_\infty(a, b) := \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}$$

と定義する (チェビシェフ距離, (ℓ^∞) 距離)．X の 3 点を $a = (0,0)$, $b = (1,2)$, $c = (3,5)$ とすると, $d_\infty(a,b)$, $d_\infty(b,c)$, $d_\infty(a,c)$ をそれぞれ求めよ．

解答例

$$\begin{aligned} d_\infty(a,b) &= \max\{|0-1|, |0-2|\} = 2, \\ d_\infty(b,c) &= \max\{|1-3|, |2-5|\} = 3, \\ d_\infty(a,c) &= \max\{|0-3|, |0-5|\} = 5. \end{aligned}$$

$\boxed{6}$ $X := \{$ 大阪, 高槻, 京都, 瀬田 $\}$ とする．それぞれ JR の駅を表すとし, その間の運賃は以下の通りとする．

A\B	大阪	高槻	京都	瀬田
大阪	0	290	580	960
高槻	290	0	410	660
京都	580	410	0	320
瀬田	960	660	320	0

$A, B \in X$ に対して $d(A,B)$ を上記表の値とする．d **は** X **上の距離にはならないことを証明せよ．**

解答例　もし, d が X 上の距離ならば三角不等式 (D3) が成立する．ここで, $d(\text{大阪}, \text{瀬田}) = 960$, $d(\text{大阪}, \text{京都}) = 580$, $d(\text{京都}, \text{瀬田}) = 320$ より

$$\begin{aligned} d(\text{大阪}, \text{瀬田}) &= 960 \\ &> 900 \\ &= 580 + 320 \\ &= d(\text{大阪}, \text{京都}) + d(\text{京都}, \text{瀬田}) \end{aligned}$$

よって, つまり,

$$d(\text{大阪}, \text{瀬田}) \leq d(\text{大阪}, \text{京都}) + d(\text{京都}, \text{瀬田})$$

が成立していない．ゆえに, d は (D3) を満たさず, X の距離ではない． □