令和7年度 位相入門I 小テスト対策 No.1

数理・知能・電子・機械・応化・環境　課程 ＿＿＿ 回生　　学生番号 ＿＿＿＿＿＿＿　名前 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ $E \subset \mathbb{R}$ を空でない有界な集合とする. α を E の最小上界 $\sup E$ とおくと, その言葉の定義から α は次の2つの条件を満たすことを証明せよ:

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad {}^\forall x \in E, \quad x \leq \alpha; \\ \text{(ii)} \quad {}^\forall \varepsilon > 0, {}^\exists x_\varepsilon \in E \quad \text{s.t.} \quad \alpha - \varepsilon < x_\varepsilon. \end{cases}$$

$\boxed{2}$ $A, B \subset \mathbb{R}$ を空でない有界な集合とする. 次を証明せよ.

(1) $A \subset B$ ならば $\inf A \geq \inf B$.

(2) $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$.

(3) ${}^\forall a \in A, {}^\forall b \in B$, $a \leq b$ が成立するならば

$$\sup A \leq \inf B.$$

$\boxed{3}$ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列, α, c をそれぞれ実数とする. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ならば

$$\lim_{n\to\infty} c\ a_n = c\ \alpha$$

であることを ε-N 論法で証明せよ.

$\boxed{4}$ 一般項が

$$a_n := \frac{1}{\sqrt{n}}$$

で与えられた数列が 0 へ収束することを ε-N 論法で証明せよ.

$\boxed{5}$ $X = C([0, 2\pi])$, すなわち, 閉区間 $[0, 2\pi]$ 上の連続関数全体とする. $f, g \in X$ に対して,

$$d(f, g) := \left\{ \int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx \right\}^{1/2}$$

と定義する (L^2 距離). X の 3 点を $f(x) = 0$, $g(x) = x$, $h(x) = \sin x$ とすると, $d(f, g)$, $d(f, h)$, $d(h, h)$ をそれぞれ求めよ.

$\boxed{6}$ X を空でない集合とする.

$$d(x, y) := \begin{cases} 1 & (x \neq y), \\ 0 & (x = y). \end{cases}$$

このとき, d は X 上の距離であることを示せ.