

# 令和7年度 位相入門I 小テスト対策 No.1

数理・知能・電子・機械・応化・環境 課程 \_\_\_\_\_ 回生 \_\_\_\_\_

学生番号 \_\_\_\_\_ 名前 \_\_\_\_\_

1  $E \subset \mathbb{R}$  を空でない有界な集合とする.  $\alpha$  を  $E$  の最小上界  $\sup E$  とおくと, その言葉の定義から  $\alpha$  は次の2つの条件を満たすことを証明せよ:

$$\begin{cases} \text{(i)} & \forall x \in E, \quad x \leq \alpha; \\ \text{(ii)} & \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in E \quad \text{s.t.} \quad \alpha - \varepsilon < x_\varepsilon. \end{cases}$$

**解答例**  $\alpha := \sup E$  とおく. このとき  $\alpha$  は  $E$  の最小上界なので上界である. よって上界の定義から

$$\forall x \in E, \quad x \leq \alpha$$

を得る. よって (i) が成立する. 次に (ii) を背理法で示す. (ii) を満たさないと仮定すると (ii) の否定:  $\exists \varepsilon_0 > 0$  s.t.

$$\forall x \in E, \quad \alpha - \varepsilon_0 \geq x$$

が成立する. よって,  $\alpha - \varepsilon_0$  も  $E$  の上界の1つであると分かる. しかし,

$$\alpha - \varepsilon_0 < \alpha$$

が成立するので,  $\alpha - \varepsilon_0$  は  $\alpha$  より小さな  $E$  の上界となり,  $\alpha$  の最小性に矛盾する. よって (ii) が成立する.  $\square$

2  $A, B \subset \mathbb{R}$  を空でない有界な集合とする. 次を証明せよ.

- (1)  $A \subset B$  ならば  $\inf A \geq \inf B$ .
- (2)  $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$ .
- (3)  $\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b$  が成立するならば

$$\sup A \leq \inf B.$$

**解答例** (1)  $\beta := \inf B$  とおく. 最大下界の定義より,

$$\forall x \in B, \quad x \geq \beta.$$

ここで,  $y \in A$  とする. 仮定より  $y \in B$  なので,

$$y \geq \beta.$$

つまり,  $\beta$  は  $A$  の下界の1つである. 一方,  $\inf A$  は  $A$  の最大下界なので

$$\inf A \geq \beta = \inf B.$$

$\square$

(2)  $(\leq)$  を示す.  $A \subset A \cup B$  より, (1) を用いれば

$$\inf A \geq \inf(A \cup B).$$

同じく,  $B \subset A \cup B$  より,

$$\inf B \geq \inf(A \cup B).$$

ゆえに

$$\inf(A \cup B) \leq \min\{\inf A, \inf B\}$$

を得る.

$(\geq)$  を示す.  $\alpha := \inf A, \beta := \inf B$  とおく.  $\inf$  の定義より,

$$\forall x \in A, \quad x \geq \alpha \geq \min\{\alpha, \beta\} = \min\{\inf A, \inf B\},$$

$$\forall y \in B, \quad y \geq \beta \geq \min\{\alpha, \beta\} = \min\{\inf A, \inf B\}.$$

よって,  $z \in A \cup B$  とすると, 和集合の定義より  $z \in A$  または  $z \in B$  である.

$$\text{(i)} \quad z \in A \text{ のとき, } z \geq \alpha \geq \min\{\inf A, \inf B\}.$$

$$\text{(ii)} \quad z \in B \text{ のとき, } z \geq \beta \geq \min\{\inf A, \inf B\}.$$

ゆえに,  $\min\{\inf A, \inf B\}$  は  $A \cup B$  の下界の1つである.  $\inf(A \cup B)$  は  $A \cup B$  の最大下界なので,

$$\inf(A \cup B) \geq \min\{\inf A, \inf B\}.$$

以上より等号が成立する.  $\square$

(3) 仮定より,  $a \in A$  とすると次が成立する:

$$\forall b \in B, a \leq b.$$

よって  $a$  は  $B$  の下界の1つである. 一方  $\inf B$  は  $B$  の最大下界なので

$$a \leq \inf B$$

が成立する. 次に  $a \in A$  は任意に選べるので, 上の式より  $\inf B$  は  $A$  の上界の1つである. 一方  $\sup A$  は最小上界であったので

$$\sup A \leq \inf B$$

を得る.  $\square$

3  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  を数列,  $\alpha, c$  をそれぞれ実数とする.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$  ならば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c a_n = c \alpha$$

であることを  $\varepsilon$ - $N$  論法で証明せよ.

**解答例**  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  s.t.

$$\forall n \geq N_\varepsilon, |ca_n - c\alpha| < \varepsilon.$$

を示す.  $\varepsilon > 0$  とする. 仮定より,  $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  s.t.

$$\forall n \geq N_\varepsilon, |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{1 + |c|}.$$

よって,  $\forall n \geq N_\varepsilon,$

$$\begin{aligned} |ca_n - c\alpha| &= |c||a_n - \alpha| \\ &\leq (1 + |c|)|a_n - \alpha| \\ &< (1 + |c|)\frac{\varepsilon}{1 + |c|} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

以上より,  $\lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = c\alpha$ . □

4 一般項が

$$a_n := \frac{1}{\sqrt{n}}$$

で与えられた数列が 0 へ収束することを  $\varepsilon$ - $N$  論法で証明せよ.

**解答例**  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  s.t.

$$\forall n \geq N_\varepsilon, \left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right| < \varepsilon$$

を示す.  $\varepsilon > 0$  とする. アルキメデスの原理より,  $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  s.t.

$$\frac{1}{\varepsilon^2} < N_\varepsilon.$$

このとき,

$$\frac{1}{\sqrt{N_\varepsilon}} < \varepsilon.$$

よって,  $\forall n \geq N_\varepsilon,$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right| &= \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{N_\varepsilon}} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

以上より,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . □

5  $X = C([0, 2\pi])$ , すなわち, 閉区間  $[0, 2\pi]$  上の連続関数全体とする.  $f, g \in X$  に対して,

$$d(f, g) := \left\{ \int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx \right\}^{1/2}$$

と定義する ( $L^2$  距離).  $X$  の 3 点を  $f(x) = 0, g(x) = x, h(x) = \sin x$  とすると,  $d(f, g), d(f, h), d(h, h)$  をそれぞれ求めよ.

**解答例**

$$\begin{aligned} d(f, g) &= \left\{ \int_0^{2\pi} |0 - x|^2 dx \right\}^{1/2} = \left\{ \int_0^{2\pi} x^2 dx \right\}^{1/2} \\ &= \left\{ \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_0^{2\pi} \right\}^{1/2} = \sqrt{\frac{8\pi^3}{3}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(f, h) &= \left\{ \int_0^{2\pi} |0 - \sin x|^2 dx \right\}^{1/2} \\ &= \left\{ \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx \right\}^{1/2} = \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx \right\}^{1/2} \\ &= \left\{ \frac{1}{2} \left[ x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{2\pi} \right\}^{1/2} = \sqrt{\pi}, \end{aligned}$$

$$d(h, h) = \left\{ \int_0^{2\pi} |\sin x - \sin x|^2 dx \right\}^{1/2} = 0.$$

6  $X$  を空でない集合とする.

$$d(x, y) := \begin{cases} 1 & (x \neq y), \\ 0 & (x = y). \end{cases}$$

このとき,  $d$  は  $X$  上の距離であることを示せ.

**解答例**  $x, y, z \in X$  とする. (D1) について, 定義より  $d$  の値は 0 か 1 しかないので,

$$d(x, y) \geq 0$$

また,  $d(x, y) = 0$  ならば, 定義より  $x = y$  の場合だけである. 逆に  $x = y$  ならば, 定義より  $d(x, y) = 0$ . よって (D1) が成立.

次に, (D2) について,  $x \neq y$  のとき  $d(x, y) = 1 = d(y, x)$ .  $x = y$  のとき  $d(x, y) = 0 = d(y, x)$ . よって (D2) も成立.

最後に, (D3) について,

(i)  $d(x, z) = 0$  のとき,  $d(x, y)$  も  $d(y, z)$  も 0 以上の数であることに注意すると

$$d(x, z) = 0 \leq d(x, y) + d(y, z).$$

よって (D3) が成立.

(ii)  $d(x, z) = 1$  のとき, 定義から  $x \neq z$  ということになるが,  $x, y, z$  の関係について,  $x$  か  $z$  のどちらか一方は  $y$  とは異なる ( $x = y$  かつ  $z = y$  という事はない). 実際, もしそうならば  $x = y = z$  となってしまう矛盾する. よって,  $d(x, y)$  か  $d(y, z)$  のどちらか一方は 1 なので

$$d(x, z) = 1 \leq d(x, y) + d(y, z).$$

よって (D3) も成立.

以上より  $d$  は  $X$  上の距離である. □