令和７年度 位相入門I 小テスト

数理・知能・電子・機械・応化・環境　課程　＿＿　回生　　学生番号 ＿＿＿＿＿＿　名前 ＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ $E \subset \mathbb{R}$ を空でない有界な集合とする．β を E の最大下界 $\inf E$ とおくと，その言葉の定義から β は次の 2 つの条件を満たすことを証明せよ:

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad {}^\forall x \in E, \quad x \geq \beta; \\ \text{(ii)} \quad {}^\forall \varepsilon > 0, {}^\exists x_\varepsilon \in E \quad \text{s.t.} \quad \beta + \varepsilon > x_\varepsilon. \end{cases}$$

解答例　$\beta := \inf E$ とおく．このとき β は E の最大下界なので下界である．よって下界の定義から

$${}^\forall x \in E, \quad x \geq \beta$$

を得る．よって (i) が成立する．次に (ii) を背理法で示す．(ii) を満たさないと仮定すると (ii) の否定: ${}^\exists \varepsilon_0 > 0$ s.t.

$${}^\forall x \in E, \quad \beta + \varepsilon_0 \leq x$$

が成立する．よって，$\beta + \varepsilon_0$ も E の下界の 1 つであると分かる．しかし，

$$\beta + \varepsilon_0 > \beta$$

が成立するので，$\beta + \varepsilon_0$ は β より大きな E の下界となり，β の最大性に矛盾する．よって (ii) が成立する．　□

$\boxed{2}$ $A, B \subset \mathbb{R}$ を空でない有界な集合とする．次を証明せよ．

(1) $A \subset B$ ならば $\sup A \leq \sup B$.

(2) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

(3) ${}^\forall a \in A, {}^\exists b_a \in B$ s.t. $a \leq b_a$ が成立するならば

$$\sup A \leq \sup B.$$

解答例　(1) $\alpha = \sup B$ とおく．最小上界の定義より，

$${}^\forall x \in B, \quad x \leq \alpha.$$

ここで，$y \in A$ とする．仮定より $y \in B$ なので，

$$y \leq \alpha.$$

つまり，α は A の上界の 1 つである．一方，$\sup A$ は A の最小上界なので

$$\sup A \leq \alpha = \sup B.$$

□

(2) ($\geq$) を示す．$A \subset A \cup B$ より，(1) を用いれば

$$\sup A \leq \sup(A \cup B).$$

同じく，$B \subset A \cup B$ より，

$$\sup B \leq \sup(A \cup B).$$

ゆえに

$$\sup(A \cup B) \geq \max\{\sup A, \sup B\}$$

を得る．

($\leq$) を示す．$\alpha := \sup A, \beta := \sup B$ とおく．sup の定義より，

$${}^\forall x \in A, \quad x \leq \alpha \leq \max\{\alpha, \beta\} = \max\{\sup A, \sup B\},$$
$${}^\forall y \in B, \quad y \leq \beta \leq \max\{\alpha, \beta\} = \max\{\sup A, \sup B\}.$$

よって，$z \in A \cup B$ とすると，和集合の定義より $z \in A$ または $z \in B$ である．

(i) $z \in A$ のとき，$z \leq \alpha \leq \max\{\sup A, \sup B\}$.

(ii) $z \in B$ のとき，$z \leq \beta \leq \max\{\sup A, \sup B\}$.

ゆえに，$\max\{\sup A, \sup B\}$ は $A \cup B$ の上界の 1 つである．$\sup(A \cup B)$ は $A \cup B$ の最小上界なので，

$$\sup(A \cup B) \leq \max\{\sup A, \sup B\}.$$

以上より等号が成立する．　□

(3) 仮定より，$a \in A$ とすると次が成立する:

$${}^\exists b_a \in B, \quad a \leq b_a.$$

ここで，$\alpha := \sup B$ とおくと，α は B の最小上界なので B の上界の 1 つである．よって上界の定義より

$$b_a \leq \alpha,$$

よって

$$a \leq b_a \leq \alpha.$$

つまり α は A の上界の 1 つであると言える．一方 $\sup A$ は A の最小上界であったので

$$\sup A \leq \alpha = \sup B$$

を得る．　□

$\boxed{3}$ $\{a_n\}, \{b_n\}$ を数列とする．$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ ならば

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha + \beta$$

であることを ε-N 論法で証明せよ．

解答例 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\forall n \geq N_\varepsilon, \quad |(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| < \varepsilon$$

を示す．$\varepsilon > 0$ とする．仮定より $\exists N_\alpha, N_\beta \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\forall n \geq N_\alpha, \quad |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$\forall n \geq N_\beta, \quad |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

ここで，$N_\varepsilon := \max\{N_\alpha, N_\beta\}$ とおけば，$\forall n \geq N_\varepsilon$,

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| &= |a_n - \alpha + b_n - \beta| \\ &\leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

以上より，$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha + \beta$. □

$\boxed{4}$ 一般項が

$$a_n := \frac{1}{n^2}$$

で与えられた数列が 0 へ収束することを ε-N 論法で証明せよ．

解答例 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\forall n \geq N_\varepsilon, \quad \left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < \varepsilon$$

を示す．$\varepsilon > 0$ とする．アルキメデスの原理より，$\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\frac{1}{\varepsilon} < N_\varepsilon.$$

このとき，

$$\frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon.$$

よって，$\forall n \geq N_\varepsilon$, $n^2 \geq n$ なので

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{n^2} - 0\right| &= \frac{1}{n^2} \\ &\leq \frac{1}{n} \\ &\leq \frac{1}{N_\varepsilon} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

以上より，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. □

$\boxed{5}$ $X = \mathbb{R}^3$ とする．$a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3) \in X$ に対して，

$$d_\infty(a, b) := \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, |a_3 - b_3|\}$$

と定義する (チェビシェフ距離，L^∞ 距離)． X の 3 点を $a = (0, 0, 0)$, $b = (1, 2, 4)$, $c = (3, 5, 6)$ とすると，$d_\infty(a, b)$, $d_\infty(b, c)$, $d_\infty(a, c)$ をそれぞれ求めよ．

解答例

$$\begin{aligned} d_\infty(a, b) &= \max\{|0 - 1|, |0 - 2|, |0 - 4|\} = 4, \\ d_\infty(b, c) &= \max\{|1 - 3|, |2 - 5|, |4 - 6|\} = 3, \\ d_\infty(a, c) &= \max\{|0 - 3|, |0 - 5|, |0 - 6|\} = 6. \end{aligned}$$

$\boxed{6}$ $X = \mathbb{R}^2$ とする．$a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2) \in X$ に対して，

$$d_1(a, b) := |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$$

と定義する (マンハッタン距離，L^1 距離)．d_1 は X の距離であることを証明せよ．

解答例 $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2) \in X = \mathbb{R}^2$ とする．距離の 3 条件 (D1)–(D3) を示す．

(D1) を示す．

$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \geq 0$$

また，$d_1(x, y) = 0$ ならば，$|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = 0$ となり，$|x_1 - y_1| = 0$ かつ $|x_2 - y_2| = 0$ である． よって $x_1 = y_1$ かつ $x_2 = y_2$ であるので $x = y$. 逆に $x = y$ ならば，$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = 0$. よって (D1) が成立．

次に，(D2) を示す． $d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| = d_1(y, x)$. よって (D2) が成立．

最後に，(D3) を示す．絶対値の三角不等式より

$$\begin{aligned} d_1(x, z) &= |x_1 - z_1| + |x_2 - z_2| \\ &= |x_1 - y_1 + y_1 - z_1| + |x_2 - y_2 + y_2 - z_2| \\ &\leq |x_1 - y_1| + |y_1 - z_1| + |x_2 - y_2| + |y_2 - z_2| \\ &= d_1(x, y) + d_1(y, z) \end{aligned}$$

よって (D3) が成立．

以上より，d_1 は $X = \mathbb{R}^2$ 上の距離である． □