令和6年度 位相入門I 小テスト No.1

__________ 課程 __________ 年生 学籍番号 __________ 名前 ________________

$\boxed{1}$ A, B, C を空でない集合とする．**集合の等号の定義に従って**

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

を証明せよ．**同値変形による証明はここでは不可とする．**

$\boxed{2}$ A_α, B を空でない集合とする．ただし, $\alpha \in I$ で I は添え字集合とする．このとき

$$B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) \supset \bigcap_{\alpha \in I} (B \cup A_\alpha)$$

を**集合の包含関係の定義に従って**証明せよ．

$\boxed{3}$ X, $A_\alpha \subset X$ を空でない集合とする．ただし, $\alpha \in I$ で I は添え字集合とする．このとき

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c \subset \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c$$

を**集合の包含関係の定義に従って**証明せよ．ただし, A^c とは A の補集合で, $A^c := X \setminus A$ で定義されるものとする．

$\boxed{4}$ X, Y を空でない集合とし, $f : X \to Y$ とする． また, $A_\alpha \subset X$ を空でない集合とする．ただし, $\alpha \in I$ で I は添え字集合とする．このとき

$$f\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) \subset \bigcap_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$$

を**集合の包含関係に従って**証明せよ．

令和6年度 位相入門I 小テスト No.2

__________ 課程 __________ 年生 学籍番号 __________ 名前 ________________

$\boxed{5}$ $E \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $a_n, a \in \mathbb{R}$ とする．次の命題の否定を論理記号で書け．

(1) ${}^{\exists}K \in \mathbb{R}$ s.t. ${}^{\forall}x \in E$, $x \leq K$.

(2) ${}^{\forall}\varepsilon > 0$, ${}^{\exists}N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t. ${}^{\forall}n \geq N_\varepsilon$, $|a_n - a| < \varepsilon$.

$\boxed{6}$ $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を数列とし $a_n \to \alpha$, $b_n \to \beta$ を仮定する．このとき, 次を ε-N 論法で証明せよ．

$$a_n - b_n \to \alpha - \beta \quad (n \to +\infty)$$

$\boxed{7}$ 一般項が次のように与えられた数列 $\{a_n\}$ の 0 への収束を ε-N 論法で証明せよ．

(1) $a_n := \dfrac{1}{n^2}$

(2) $a_n := \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sin \dfrac{n\pi}{2}$

$\boxed{8}$ $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$d(x, y) := |x - y|$$

と定義する. d は $\mathbb{R}$ の距離であることを示せ.

$\boxed{9}$ $x, y \in \mathbb{R}^2$ に対して $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ とおき,

$$d(x, y) := \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

と定義する (チェビシェフ距離, L^∞ 距離).

(1) $a = (4, 0)$, $b = (4, 3)$, $c = (2, 2)$ のとき $d(a, b)$, $d(b, c)$, $d(a, c)$ をそれぞれ求めよ.

(2) $(\mathbb{R}^2, d)$ は距離空間であることを示せ.