

令和5年度 位相入門I 小テスト No.1

_____ 課程 _____ 年生 学籍番号 _____ 名前 _____

- 1 A, B, C を空でない集合とする. 集合の等号の定義に従って

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

を証明せよ.

- 2 A_α, B を空でない集合とする. ただし, $\alpha \in I$ で I は添え字集合. このとき

$$B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) \subset \bigcap_{\alpha \in I} (B \cup A_\alpha)$$

を集合の包含関係の定義に従って証明せよ.

- 3 $X, A_\alpha \subset X$ を空でない集合とする. ただし, $\alpha \in I$ で I は添え字集合. このとき

$$\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c$$

を集合の等号の定義に従って証明せよ. ただし, A^c とは A の補集合で, $A^c := X \setminus A$ で定義されるものとする.

- 4 $f: X \rightarrow Y$ とし, $A_\alpha \subset X$ を空でない集合とする. ただし, $\alpha \in I$ で I は添え字集合. このとき

$$f\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \subset \bigcup_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$$

を集合の包含関係に従って証明せよ.

令和5年度 位相入門I 小テスト No.2

_____ 課程 _____ 年生 学籍番号 _____ 名前 _____

5 次の関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ について, 「全射」, 「単射」, 「全単射」, 「いずれでもない」かを判断し, 最も適切なものを選び答えよ. (「全単射」な関数を「全射」と答えた場合には不正解という意味. つまり「全射」は「全射ではあるが単射ではない」という意味で用いること.)

- (1) $f(x) = x^2$, (ただし, 定義域は $x \geq 0$).
(2) $f(x) = x(x-1)(x+1)$.
(3) $f(x) = x^3$.
(4) $f(x) = \cos x$.

7 一般項が次のように与えられた数列 $\{a_n\}$ の 0 への収束を ε - N 論法で証明せよ.

- (1) $a_n := \frac{1}{n}$
(2) $a_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{n\pi}{2}$

6 $E \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $a_n, a \in \mathbb{R}$ とする. 次の命題の否定を論理記号で書け.

- (1) $\exists K \in \mathbb{R}$ s.t. $\forall x \in E, x \leq K$.
(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \geq N_\varepsilon, |a_n - a| < \varepsilon$.

8 $a, b \in \mathbb{R}^2$ に対して $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ とおき,

$$d_2(a, b) := \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

と定義する (L^2 距離). 次の問いに答えよ.

- (1) $a = (4, 0)$, $b = (4, 3)$, $c = (2, 2)$ のとき $d_1(a, b)$, $d_1(b, c)$, $d_1(a, c)$ をそれぞれ求めよ.
- (2) d_2 は $\mathbb{R}^2$ の距離であることを示せ.