

令和7年度 位相入門II 小テスト

数理・知能・電子・機械・応化・環境 課程 _____ 回生 _____

学生番号 _____ 名前 _____

0 定義の確認 $a \in \mathbb{R}^2, \varepsilon > 0$ とする.

$$N(a; \varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, a) < \varepsilon\}.$$

$A \subset \mathbb{R}^2$ とする.

A が開集合である. $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall x \in A, \exists \varepsilon_x > 0 \text{ s.t. } N(x; \varepsilon_x) \subset A.$

A が閉集合である. $\stackrel{\text{def}}{\iff} A^c$ が開集合である.

1 次で定義される $I \subset \mathbb{R}$ や $A \subset \mathbb{R}^2$ に対して, 内部, 外部, 境界をそれぞれ求めよ. ただし, $x := (x_1, x_2)$ と表記する.

(1) $I = (0, 1]$.

(2) $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1, x_2 \geq 0\}.$

(3) $I = \mathbb{Q}.$

2 $a \in \mathbb{R}^2$ とする. 集合 $\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合であることを証明せよ.

3 $a \in \mathbb{R}^2$ とする. 集合 $\{a\}$ や $\emptyset$ は, それぞれ $\mathbb{R}^2$ の閉集合であることを証明せよ.

4 $U_\alpha \subset \mathbb{R}^2$ を開集合とする, ただし $\alpha \in I$ は添え字集合. このとき,

$$\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$$

も $\mathbb{R}^2$ の開集合であることを証明せよ.

5 $A, B \subset \mathbb{R}^2$ とする.

$$(A \cup B)^i = A^i \cup B^i$$

を証明せよ.

7 $A \subset \mathbb{R}^2$ をコンパクト集合とする. $B \subset \mathbb{R}^2$ が $B \subset A$ を満たす閉集合ならば B もコンパクト集合であることを証明せよ.

6 $A, B \subset \mathbb{R}^2$ とする. $A \subset B$ ならば $\overline{A} \subset \overline{B}$ を証明せよ.