

令和7年度 位相入門II 小テスト

数理・知能・電子・機械・応化・環境 課程 _____ 回生

学生番号 _____ 名前 _____

0 定義の確認 $a \in \mathbb{R}^2, \varepsilon > 0$ とする.

$$N(a; \varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, a) < \varepsilon\}.$$

$A \subset \mathbb{R}^2$ とする.

A が開集合である. $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall x \in A, \exists \varepsilon_x > 0 \text{ s.t. } N(x; \varepsilon_x) \subset A.$

A が閉集合である. $\stackrel{\text{def}}{\iff} A^c$ が開集合である.

1 次で定義される $I \subset \mathbb{R}$ や $A \subset \mathbb{R}^2$ に対して, 内部, 外部, 境界をそれぞれ求めよ. ただし, $x := (x_1, x_2)$ と表記する.

(1) $I = (0, 1].$

(2) $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1, x_2 \geq 0\}.$

(3) $I = \mathbb{Q}.$

解答例 (1) $I^i = (0, 1),$

$$I^e = (-\infty, 0) \cup (1, \infty),$$

$$\partial I = \{0, 1\}.$$

(2) $A^i = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1, x_2 > 0\},$

$$A^e = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 > 1, x_2 \geq 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 < 0\},$$

$$\partial A = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_2 \geq 0\} \cup \{(x_1, 0) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x_1 \leq 1\}.$$

(3) $I^i = \emptyset,$

$$I^e = \emptyset,$$

$$\partial I = \mathbb{R}.$$

2 $a \in \mathbb{R}^2$ とする. 集合 $\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合であることを証明せよ.

解答例 $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$ とおく. $\forall x \in U, \exists \varepsilon_x > 0 \text{ s.t.}$

$$N(x; \varepsilon_x) \subset U$$

を示せばよい. $x \in U$ とする. $\varepsilon_x := d(x, a)$ とおくと, $x \in U$ より $x \neq a$ なので, 距離の定義より

$$d(x, a) > 0$$

つまり, $\varepsilon_x > 0$ である. 最後にこの半径 ε_x で

$$N(x; \varepsilon_x) \subset U (= \mathbb{R}^2 \setminus \{a\})$$

を示す. $y \in N(x; \varepsilon_x)$ とすると ε -近傍の定義より

$$d(y, x) < \varepsilon_x$$

以上より

$$d(x, y) < \varepsilon_x = d(x, a).$$

よって, 三角不等式より

$$\begin{aligned} 0 < d(x, a) &\leq d(x, y) + d(y, a) \\ &< \varepsilon_x + d(y, a) \\ &= d(x, a) + d(y, a), \end{aligned}$$

よって, $0 < d(y, a)$ より $y \neq a$ なので $y \in U = \mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$.
つまり

$$N(x; \varepsilon_x) \subset U$$

である. 以上より $\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合である. $\square$

3 $a \in \mathbb{R}^2$ とする. 集合 $\{a\}$ や $\emptyset$ は, それぞれ $\mathbb{R}^2$ の閉集合であることを証明せよ.

解答例 $F := \{a\}$ とおく. F^c が開集合であることを示せばよい. $F^c := \mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$ でさらに2番の問題より, F^c は開集合である. ゆえに F は閉集合. $\square$

$E := \emptyset$ とおく. E^c が開集合であることを示せばよい. $x \in E^c = \mathbb{R}^2$ とおくと, $\varepsilon_x := 1$ とおくと, $\varepsilon_x > 0$ でさらに,

$$N(x; \varepsilon_x) \subset \mathbb{R}^2.$$

よって, E^c は開集合である. ゆえに E は閉集合. $\square$

4 $U_\alpha \subset \mathbb{R}^2$ を開集合とする, ただし $\alpha \in I$ は添え字集合. このとき,

$$\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$$

も $\mathbb{R}^2$ の開集合であることを証明せよ.

解答例 $U := \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ とおく. $\forall x \in U, \exists \varepsilon_x > 0 \text{ s.t.}$

$$N(x; \varepsilon_x) \subset U$$

を示せばよい. $x \in U$ とする. このとき和集合の定義から $\exists \alpha_0 \in I \text{ s.t.}$

$$x \in U_{\alpha_0}.$$

この選ばれた U_{α_0} も開集合なので, $\exists \varepsilon_x > 0 \text{ s.t.}$

$$N(x; \varepsilon_x) \subset U_{\alpha_0}.$$

さらに

$$U_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = U$$

であるので開集合の定義を満たす. $\square$

5 $A, B \subset \mathbb{R}^2$ とする.

$$(A \cap B)^i = A^i \cap B^i$$

を証明せよ.

解答例 (C) を示す. $x \in (A \cap B)^i$ とする. 内部の定義より点 x は $A \cap B$ の内点である. よって $\exists \varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x; \varepsilon_x) \subset A \cap B.$$

つまり,

$$N(x; \varepsilon_x) \subset A, \quad \text{かつ} \quad N(x; \varepsilon_x) \subset B$$

といえる. これは点 x が A の内点かつ B の内点であることを意味するので $x \in A^i$ かつ $x \in B^i$ となり,

$$x \in A^i \cap B^i.$$

よって

$$(A \cap B)^i \subset A^i \cap B^i.$$

(C) を示す. $x \in A^i \cap B^i$ とすると, 共通部分の定義より $x \in A^i$ かつ $x \in B^i$. 内部の定義より点 x は A の内点かつ B の内点であるので $\exists \varepsilon_A, \varepsilon_B > 0$ s.t.

$$N(x; \varepsilon_A) \subset A \quad \text{かつ} \quad N(x; \varepsilon_B) \subset B.$$

そこで, $\varepsilon_x := \min\{\varepsilon_A, \varepsilon_B\}$ とおくと, $\varepsilon_x > 0$ であり

$$N(x; \varepsilon_x) \subset A \quad \text{かつ} \quad N(x; \varepsilon_x) \subset B$$

となり,

$$N(x; \varepsilon_x) \subset A \cap B.$$

これは点 x が $A \cap B$ の内点であることを意味するので,

$$x \in (A \cap B)^i.$$

よって

$$(A \cap B)^i \supset A^i \cap B^i.$$

以上より等号が成立. $\square$

6 $A, B \subset \mathbb{R}^2$ とする. $A \subset B$ ならば $\overline{A} \subset \overline{B}$ を証明せよ.

解答例 $x \in \overline{A}$ とする. 閉包の定義より x は A の触点, すなわち, $\forall \varepsilon > 0, N(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. よって, $y \in N(x; \varepsilon) \cap A$ がとれる. つまり, $y \in N(x; \varepsilon)$ かつ $y \in A$. 仮定 $A \subset B$ より, $y \in B$ なので,

$$y \in N(x; \varepsilon) \cap B$$

が成立する. すなわち, $N(x; \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$. つまり, x は B の触点である. よって $x \in \overline{B}$. $\square$

7 $A \subset \mathbb{R}^2$ をコンパクト集合とする. $B \subset \mathbb{R}^2$ が $B \subset A$ を満たす閉集合ならば B もコンパクト集合であることを証明せよ.

解答例 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を B の任意の開被覆とする. すなわち,

$$B \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

と仮定する. B は閉集合なので B^c は開集合である. そこで $U_{\lambda_0} := B^c$ とおき, $\Lambda' := \Lambda \cup \{\lambda_0\}$ と添え字集合をとりなおして (1 つだけ追加して) $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda'}$ を考える. まず,

$$A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} U_\lambda$$

が成立する. 実際, $x \in A$ とすると,

(1) $x \in B$ のとき,

$$x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} U_\lambda.$$

(2) $x \notin B$ のとき, $x \in B^c = U_{\lambda_0}$ より

$$x \in U_{\lambda_0} \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} U_\lambda.$$

つまり $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda'}$ がコンパクト集合 A の開被覆になっている. よってコンパクトの定義より有限開被覆が選び直せて (その中に U_{λ_0} が入っていても入っていなくてもどちらでもよいが入れても問題ない), すなわち $\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\} \subset \Lambda'$ が存在して

$$A \subset \bigcup_{k=0}^N U_{\lambda_k}$$

とできる. $B \subset A$ より

$$B \subset \bigcup_{k=0}^N U_{\lambda_k}$$

であるが, $U_{\lambda_0} = B^c$ は取り除いて,

$$B \subset \bigcup_{k=1}^N U_{\lambda_k}$$

とできる. $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\} \subset \Lambda$ より $\{U_{\lambda_k}\}_{k=1}^N$ が B の任意開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対する有限開被覆になっているので, B はコンパクト集合である. $\square$