

位相入門II・自習シート

全体集合 $X = \mathbb{R}^2$ や $X = \mathbb{R}$ の距離を d とする (同じ文字 d を使う).

問1 $a, b \in \mathbb{R}^2$ とする. 平面全体 \mathbb{R}^2 から2点 a と b を除いた集合

$$U := \mathbb{R}^2 \setminus \{a, b\}$$

は開集合であることを証明せよ.

問2 $a, b \in \mathbb{R}$: $a < b$ とする. 私たちがこれまで开区間と呼んできた集合 $I := (a, b)$ は開集合であること¹⁾を証明せよ. ただし, 距離 $d(x, y) = |x - y|$ を用いよ.

問3 $n \in \mathbb{N}$ とし, \mathbb{R} の开区間として U_n を

$$U_n := N\left(0; \frac{1}{n}\right), \quad \text{つまり} \quad \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \text{ のこと}$$

とおく.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \{0\}$$

であることを集合の等号の定義に従って証明せよ.

定義 $F \subset \mathbb{R}^2$ とする. $F^c := \mathbb{R}^2 \setminus F$ が \mathbb{R}^2 の開集合であるとき F のことを \mathbb{R}^2 の閉集合とよぶ.

問4 $a \in \mathbb{R}^2$ とする. 次の集合 F は \mathbb{R}^2 の閉集合であることを証明せよ. ただし, これまでの講義や自習シートで扱った, \mathbb{R}^2 , $N(a; 1)$, $\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$ はそれぞれ開集合であることを用いてもよい.

(1) $F := \emptyset$

(2) $F := \{a\}$

(3) $F := \{x \in \mathbb{R}^2 : d(\mathbf{0}, x) \leq 1\}$ (つまり原点 $\mathbf{0} = (0, 0)$ 中心, 半径1の円の境界と内側)

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点しておくこと. 提出しなくても試験で60点以上取れば合格です.

¹⁾ 講義で定義した ε -近傍を用いた開集合の定義を満たすこと.