2026/06/10/No.8

位相入門II・自習シート

以後, $\mathbb{R}^2$ の点を $\boldsymbol{x} := (x_1, x_2), \boldsymbol{y} := (y_1, y_2)$ のように表記する. $\mathbb{R}^2$ の距離はユークリッド距離

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

を用いる.

例題　第一象限 $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合であることを示せ.

解答例　$U := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$ とおく. ${}^\forall \boldsymbol{x} \in U$, ${}^\exists \varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(\boldsymbol{x}; \varepsilon_x) \subset U$$

を示せばよい. $\boldsymbol{x} \in U$ とする. $\varepsilon_{\boldsymbol{x}} := \frac{1}{2}\min\{x_1, x_2\}$ とおくと [1], $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ より $\varepsilon_{\boldsymbol{x}} > 0$. このとき, $N(\boldsymbol{x}; \varepsilon_{\boldsymbol{x}}) \subset U$ である.

実際, $\boldsymbol{y} \in N(\boldsymbol{x}; \varepsilon_{\boldsymbol{x}})$ とする. ε-近傍の定義より

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| < \varepsilon_{\boldsymbol{x}}$$

よって, 第 1 成分について

$$|x_1 - y_1| \leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} < \varepsilon_{\boldsymbol{x}},$$
$$-\varepsilon_{\boldsymbol{x}} < x_1 - y_1 < \varepsilon_{\boldsymbol{x}} < \frac{1}{2}x_1 < x_1,$$
$$-y_1 < 0,$$
$$y_1 > 0.$$

第 2 成分についても

$$|x_2 - y_2| \leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} < \varepsilon_{\boldsymbol{x}},$$
$$y_2 > 0.$$

以上より $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2) \in U$.

よって, U は開集合である. □

注: 他の距離 d だとどうなる?　距離が変わると, 同じ証明で U が開集合になる場合もあれば, 考察を変更せねばならない場合もあります. 例えば

$$d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

の場合, 上記証明をなぞってみましょう.

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

[1] $\varepsilon_{\boldsymbol{x}} := \min\{x_1, x_2\}$ でも十分.

$U := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$ とおく. ${}^\forall \boldsymbol{x} \in U$, ${}^\exists \varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(\boldsymbol{x}; \varepsilon_x) \subset U$$

を示せばよい. $\boldsymbol{x} \in U$ とする. $\varepsilon_{\boldsymbol{x}} := \frac{1}{2}\min\{x_1, x_2\}$ とおくと, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ より $\varepsilon_{\boldsymbol{x}} > 0$. このとき, $N(\boldsymbol{x}; \varepsilon_{\boldsymbol{x}}) \subset U$ である.

実際, $\boldsymbol{y} \in N(\boldsymbol{x}; \varepsilon_{\boldsymbol{x}})$ とする. ε-近傍の定義より

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| < \varepsilon_{\boldsymbol{x}}$$

よって, 第 1 成分について

$$|x_1 - y_1| \leq |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) < \varepsilon_{\boldsymbol{x}},$$

$$-\varepsilon_{\boldsymbol{x}} < x_1 - y_1 < \varepsilon_{\boldsymbol{x}} < \frac{1}{2}x_1 < x_1,$$

$$-y_1 < 0,$$

$$y_1 > 0.$$

第 2 成分についても

$$|x_2 - y_2| \leq |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) < \varepsilon_{\boldsymbol{x}},$$

$$y_2 > 0.$$

以上より $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2) \in U$.

よって, U は開集合である. □

次に離散距離 d_0 をえらんでみる:

$$d_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \begin{cases} 1 & (\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}), \\ 0 & (\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}). \end{cases}$$

この場合, 点 $\boldsymbol{x}$ の ε-近傍は

$$N(\boldsymbol{x}; \varepsilon) := \begin{cases} \{\boldsymbol{x}\} & (\varepsilon \leq 1), \\ \mathbb{R}^2 & (\varepsilon > 1) \end{cases}$$

と, とても極端なものになることに注意が必要である.

$U := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$ とおく. ${}^\forall \boldsymbol{x} \in U$, ${}^\exists \varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(\boldsymbol{x}; \varepsilon_x) \subset U$$

を示せばよい. $\boldsymbol{x} \in U$ とする (ここまでは全く一緒). この場合には上記関係を満たす半径としては, $\varepsilon_{\boldsymbol{x}} \leq 1$ であればどのようなものでもよいので, 例えば $\varepsilon_{\boldsymbol{x}} := 1/2$ とおく. このとき $\boldsymbol{x} \in U$ より

$$N(\boldsymbol{x}; \varepsilon_{\boldsymbol{x}}) = \{\boldsymbol{x}\} \subset U$$

である. 以上より開集合の定義を満たす. □

つまり, 第一象限 U が開集合であることに変わりは無いが, 距離 d を変えてしまうと, 半径の選び方はそれに応じて変えねばならないので, 一般にどのような距離でも同じ半径の取り方ですべてがうまくいくとは限らない [2).].

問 1　次の集合は $\mathbb{R}^2$ の開集合であることを示せ. ただし $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ とする.

(1) $\mathbb{R}^2$

(2) $N(\boldsymbol{a}; 1)$

(3) $\mathbb{R}^2 \setminus \{\boldsymbol{a}\}$

問 2　次の (1) と (2) を証明せよ:
(1) U_λ を $\mathbb{R}^2$ の開集合とする (ただし $\lambda \in \Lambda$ とし Λ は添え字集合). このとき

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

も $\mathbb{R}^2$ の開集合である.
(2) $n \in \mathbb{N}$ とし, $U_1, U_2, \ldots, U_n$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合とする. このとき

$$\bigcap_{k=1}^{n} U_k \quad (= U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n)$$

も $\mathbb{R}^2$ の開集合である.

[2)] Q: どんな距離でも第一象限は開集合になるのだろうか?