

位相入門I・自習シート

問1 $X = \mathbb{R}$, つまり実数とする. $a, b \in X$ に対して

$$d(a, b) := |a - b|$$

と定義する. $a = 4, b = 3, c = 2$ のとき $d(a, b)$ の例をもとに, $d(a, a), d(b, c), d(a, c)$ をそれぞれ求めよ.

$$d(a, b) = |4 - 3| = 1.$$

問2 $X = \mathbb{R}^2$, つまり平面とする. $a, b \in X$ に対して $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2)$ とおき,

$$d_1(a, b) := |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$$

と定義する (マンハッタン距離, L^1 距離). $a = (4, 0), b = (4, 3), c = (2, 2)$ のとき $d_1(a, b)$ の例をもとに, $d_1(a, a), d_1(b, c), d_1(a, c)$ をそれぞれ求めよ.

$$d_1(a, b) = |4 - 4| + |0 - 3| = 3.$$

問3 $X := \{ \text{高槻, 京都, 大津, 瀬田} \}$ とする. それぞれ JR の駅を表すとし, その間の運賃は以下の通りとする.

A \ B	高槻	京都	大津	瀬田
高槻	0	410	580	660
京都	410	0	200	320
大津	580	200	0	200
瀬田	660	320	200	0

$A, B \in X$ に対して $d(A, B)$ を上記表の値とする. 例えば A を高槻, B を京都とすると

$$d(\text{高槻}, \text{京都}) = 410$$

である. $d(\text{大津}, \text{大津}), d(\text{大津}, \text{瀬田}), d(\text{瀬田}, \text{大津})$ をそれぞれ求めよ.

問4 $X = \mathbb{R}^2$ とする. $a, b \in X$ に対して $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2)$ とおき,

$$d_\infty(a, b) := \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}$$

と定義する (チェビシエフ距離, L^∞ 距離). $a = (4, 0), b = (4, 3), c = (2, 2)$ のとき $d_\infty(a, b)$ の例をもとに, $d_\infty(a, a), d_\infty(b, c), d_\infty(a, c)$ をそれぞれ求めよ.

$$d_\infty(a, b) = \max\{|4 - 4|, |0 - 3|\} = 3.$$