位相入門I・自習シート

問 1　$E_1 \subset E_2 \subset \mathbb{R}$ とし, 空でなく上に有界とする. このとき

$$\sup E_1 \le \sup E_2$$

を証明せよ.

問 2　$E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$ とし, それぞれ空でなく有界とする.

$$E := \{x + y : x \in E_1, y \in E_2\}$$

とおく (つまり, ${}^\forall z \in E$, ${}^\exists x_z \in E_1$, ${}^\exists y_z \in E_2$ s.t. $z = x_z + y_z$). このとき

$$\sup E \le \sup E_1 + \sup E_2$$

を証明の解答例を参考に

$$\inf E \ge \inf E_1 + \inf E_2$$

を証明せよ.

解答例　E の定義から ${}^\forall z \in E$, ${}^\exists x_z \in E_1$, ${}^\exists y_z \in E_2$ s.t.

$$z = x_z + y_z$$

とかけている. いま, $\alpha := \sup E_1$, $\beta := \sup E_2$ とおくと最小上界の定義より

$$x_z \le \alpha, \quad y_z \le \beta$$

を満たす. よって

$$z = x_z + y_z \le \alpha + \beta$$

を満たす. z は任意に選べるので, これは $\alpha + \beta$ が E の上界の 1 つであることを意味する. 一方, $\sup E$ は E の最小上界なので

$$\sup E \le \alpha + \beta = \sup E_1 + \sup E_2.$$

□

問 3　$A, B \subset \mathbb{R}$ を空でなく有界とする. このとき次を証明せよ.

(1) $A \cap B \neq \emptyset$ ならば $\inf A \le \sup B$.

(2) $-A := \{-x : x \in A\}$ [1] とおく. このとき

$$\sup(-A) = -\inf A.$$

(3) ${}^\forall a \in A, {}^\forall b \in B$, $a \le b$ が成立するならば $\sup A \le \inf B$.

(4) ${}^\forall a \in A$, ${}^\exists b_a \in B$ s.t. $a \le b_a$ が成立するならば $\sup A \le \sup B$.

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

[1] いいかえると $-A := \{z : {}^\exists x \in A \text{ s.t.} z = -x\}$

問 4　$E \subset \mathbb{R}$ を空でない部分集合とする．$\alpha \in \mathbb{R}$ が

$$\alpha \in E \quad \text{かつ} \quad {}^{\forall}x \in E, \alpha \leq x$$

を満たすとき α を E の最小値とよび $\min E$ とかく．E の最小値が存在するならば

$$\min E = \inf E$$

であることを証明せよ．