

## 位相入門II・自習シート

定義  $A \subset \mathbb{R}^2$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$  とする.

$$\begin{aligned} \text{点 } x \text{ が } A \text{ の内点である.} & \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists \varepsilon > 0 \text{ s.t. } N(x; \varepsilon) \subset A. \\ \text{点 } x \text{ が } A \text{ の外点である.} & \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists \varepsilon > 0 \text{ s.t. } N(x; \varepsilon) \subset A^c. \end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned} A^i &:= \{x \in A : \text{点 } x \text{ が } A \text{ の内点}\}, \\ A^e &:= \{x \in A^c : \text{点 } x \text{ が } A \text{ の外点}\} \end{aligned}$$

とおき, それぞれ  $A$  の内部 (interior),  $A$  の外部 (exterior) とよぶ. 定義より  $A^i \subset A$ ,  $A^e \subset A^c$  が成立する.

問1 次の集合  $A$ ,  $B$  の内部と外部をそれぞれ求めよ.

$$A := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_1 > 0\},$$

$$B := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 < 1, 0 < x_2 \leq 1\}.$$

問2  $A \subset \mathbb{R}^2$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$  とする.  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $N(x; \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$  ならば  $x \notin A^i$  であることを対偶を用いて証明せよ.

問3  $A \subset \mathbb{R}^2$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$  とする.

$$\text{点 } x \text{ が } A \text{ の境界点である.} \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0, N(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \text{ かつ } N(x; \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset.$$

と定義する. このとき,

$$\text{点 } x \text{ が } A \text{ の境界点である.} \iff x \notin A^e \text{ かつ } x \notin A^i.$$

が成立することを示せ. ただし, 今回の問2と前回の自習シート問3の結果を用いてもよい.

□