位相入門II・自習シート

$A \subset \mathbb{R}^2$ とする．A の内部 A^i は

$$A^i := \{x \in A : ^\exists\, \varepsilon_x > 0 \text{ s.t. } N(x; \varepsilon_x) \subset A\}$$

で定義される．つまり A の内部 A^i とは A の内点全体の集合である．A がどのような集合であっても，A^i は $\mathbb{R}^2$ の開集合となる．なぜなら，A^i の任意の点 $x \in A^i$ は $^\exists\varepsilon_x > 0$ s.t. $N(x; \varepsilon_x) \subset A$ を満たすので開集合の定義を満たすからである．

問 1 $A, B \subset \mathbb{R}^2$ とする．次を証明せよ．

$$(A \cap B)^i = A^i \cap B^i.$$

問 2 $A \subset \mathbb{R}^2$ とし，B は $B \subset A$ を満たすような $\mathbb{R}^2$ の開集合とする．このとき，$B \subset A^i$ を証明せよ [1)]

問 3 $A \subset \mathbb{R}^2$, $x \in \mathbb{R}^2$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 命題「$^\forall\varepsilon > 0,\ N(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ ならば $x \notin A^e$」の対偶を論理記号で書け．

(2) 上記 (1) の対偶を示すことで命題「$^\forall\varepsilon > 0,\ N(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ ならば $x \notin A^e$」を証明せよ．

提出する場合は，解答例を参考にして自分で採点をしておくこと．提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です．

1) この事実は A の内部 A^i は A に含まれる最大の開集合であることを意味する．A に含まれるどのような開集合 B をえらんできても，$B \subset A^i$ となるので，A^i が開集合であることから，A^i は A に含まれる最大の開集合といえる．