

位相入門I・自習シート

定義 A, B を集合とする. 「任意の (すべての) $x \in A$ に対して $x \in B$ 」が成立するとき $A \subset B$ または $B \supset A$ とかく. 「 $A \subset B$ かつ $A \supset B$ 」が成立するとき $A = B$ と定義する.

定義 A, B を集合とする.

$$A \cup B := \{x : x \in A \text{ または } x \in B\},$$

$$A \cap B := \{x : x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$

と定義し, それぞれ A と B の和集合, A と B の共通部分とよぶ.

問1 [集合論の復習] A, B, C を集合とする. **集合の等号の定義に従って**次を証明せよ.

$$(1) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

解答例 (c) を示す. $x \in A \cap (B \cup C)$ とする. 共通部分の定義より...

(\supset) を示す.

$$(2) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

問2 [集合論の復習] X を集合とする. 「すべての (任意の) $x \in X$ に対して性質 $P(x)$ が成立する」ことを略記して

$$\forall x \in X, P(x) \quad \text{や} \quad \forall x \in X, P(x)$$

とかく¹⁾. 「ある $x \in X$ が存在して性質 $P(x)$ が成立する」ことを略記して

$$\exists x \in X \text{ s.t. } P(x) \quad \text{や} \quad \exists x \in X \text{ s.t. } P(x)$$

とかく²⁾. 次の日本語で書かれた命題を, 上記の「 \forall 」や「 \exists — s.t.」を用いて書き直せ. またその命題は正しいか (真), 正しくないか (偽) を判断せよ³⁾.

(1) すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して, $x > 0$.

(2) ある $x \in \mathbb{Q}$ が存在して, $\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$.

(3) 任意の $x \in \mathbb{N}$ に対して, $x \geq 0$.

(4) ある $x \in \mathbb{Z}$ が存在して, $6 = 2x$.

(5) すべての $x \in \mathbb{Z}$ に対して, $6 = 2x$.

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点しておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

¹⁾英語で書くと「For all $x \in X, P(x)$ holds」というような文章になる. For all の「a」をひっくり返して「 \forall 」を用いて書いている.

²⁾英語で書くと「There exists $x \in X$ such that $P(x)$ holds」というような文章になる. There exists の「e」をひっくり返して「 \exists 」を用いて, 「such that」を「s.t.」と省略して書いている.

³⁾問題中に使われている白抜きの記号には意味が割り当てられている: \mathbb{N} は自然数, \mathbb{Z} は整数, \mathbb{Q} は有理数, \mathbb{R} は実数, \mathbb{C} は複素数を意味する.

- (6) 任意の $x \in \mathbb{C}$ に対して, ある $a, b \in \mathbb{R}$ が存在して, $x = a + bi$.
- (7) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して, ある $y \in \mathbb{N}$ が存在して, $x < y$.
- (8) ある $x \in \mathbb{R}$ が存在して, 任意の $y \in \mathbb{N}$ に対して, $x < y$.
- (9) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して, ある $y \in \mathbb{N}$ が存在して, $x > y$.
- (10) ある $x \in \mathbb{R}$ が存在して, 任意の $y \in \mathbb{N}$ に対して, $x > y$.