

## 位相入門II・自習シート

全体集合  $X = \mathbb{R}^2$  や  $X = \mathbb{R}$  の距離を  $d$  とする (同じ文字  $d$  を使う).

問1  $a, b \in \mathbb{R}^2$  とする. 平面全体  $\mathbb{R}^2$  から2点  $a$  と  $b$  を除いた集合

$$U := \mathbb{R}^2 \setminus \{a, b\}$$

は開集合であることを証明せよ.

解答例  $x \in U = \mathbb{R}^2 \setminus \{a, b\}$  とする  $\varepsilon_x := \min\{d(x, a), d(x, b)\}$  とおく. このとき,  $x \neq a$  かつ  $x \neq b$  より  $d(x, a) > 0$  かつ  $d(x, b) > 0$ . つまり  $\varepsilon_x > 0$  である. このとき,

$$N(x; \varepsilon_x) \subset U$$

である. 実際,  $y \in N(x; \varepsilon_x)$  とすると,  $\varepsilon$ -近傍の定義より

$$d(x, y) < \varepsilon_x \leq d(x, a), \quad \text{かつ}, \quad d(x, y) < \varepsilon_x \leq d(x, b).$$

ゆえに,  $y \neq a$  かつ  $y \neq b$  である. よって,  $y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{a, b\} = U$ .

以上より,  $U$  は開集合である. □

問2  $a, b \in \mathbb{R}$ :  $a < b$  とする. 私たちがこれまで开区間と呼んできた集合  $I := (a, b)$  は開集合であること<sup>1)</sup>を証明せよ. ただし, 距離  $d(x, y) = |x - y|$  を用いよ.

解答例  $x \in I$  とする.  $a < x < b$  である.  $\varepsilon_x := \min\{d(x, a), d(x, b)\} = \min\{x - a, b - x\}$  とおく. このとき,  $a < x < b$  より  $d(x, a) = |x - a| = x - a > 0$  かつ  $d(x, b) = |x - b| = b - x > 0$ . つまり  $\varepsilon_x > 0$  である. このとき,

$$N(x; \varepsilon_x) \subset I$$

である. 実際,  $y \in N(x; \varepsilon_x)$  とすると,  $\varepsilon$ -近傍の定義より

$$d(x, y) = |x - y| < \varepsilon_x \leq d(x, a) = x - a, \quad \text{かつ}, \quad d(x, y) = |x - y| < \varepsilon_x \leq d(x, b) = b - x.$$

ゆえに,

$$x - y \leq |x - y| < x - a, \quad \text{つまり}, \quad y > a,$$

かつ

$$y - x \leq |x - y| < b - x, \quad \text{つまり}, \quad y < b$$

である. よって,  $a < y < b$  つまり  $y \in I$ .

以上より,  $I$  は開集合である. □

問3  $n \in \mathbb{N}$  とし,  $\mathbb{R}$  の开区間として  $U_n$  を

$$U_n := N\left(0; \frac{1}{n}\right), \quad \text{つまり} \quad \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \text{ のこと}$$

とおく.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \{0\}$$

であることを集合の等号の定義に従って証明せよ.

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

<sup>1)</sup>講義で定義した  $\varepsilon$ -近傍を用いた開集合の定義を満たすこと.

解答例 (c) を示す.  $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$  とする. 共通部分の定義より,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x \in U_n = N\left(0; \frac{1}{n}\right).$$

よって,  $\varepsilon$ -近傍の定義から  $d(x, 0) < 1/n$  が得られるので, 両辺  $n \rightarrow +\infty$  とすると

$$d(x, 0) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

つまり

$$0 \leq d(x, 0) \leq 0$$

より  $d(x, 0) = 0$ . 距離の定義よりこれは  $x = 0$  を意味する. すなわち,  $x \in \{0\}$ . ゆえに

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \subset \{0\}.$$

(d) を示す.  $x \in \{0\}$  とする.  $\{0\}$  は 1 点 0 からのみなる集合なので  $x = 0$  を意味する. さらに

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \in N\left(0; \frac{1}{n}\right) = U_n.$$

共通部分の定義より

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n.$$

ゆえに

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \supset \{0\}.$$

以上より等号が成立.

□

**定義**  $F \subset \mathbb{R}^2$  とする.  $F^c := \mathbb{R}^2 \setminus F$  が  $\mathbb{R}^2$  の開集合であるとき  $F$  のことを  $\mathbb{R}^2$  の閉集合とよぶ.

**問 4**  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$  とする. 次の集合  $F$  は  $\mathbb{R}^2$  の閉集合であることを証明せよ. ただし, これまでの講義や自習シートで扱った,  $\mathbb{R}^2$ ,  $N(\mathbf{a}; 1)$ ,  $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{a}\}$  はそれぞれ開集合であることを用いてもよい.

(1)  $F := \emptyset$

(2)  $F := \{\mathbf{a}\}$

(3)  $F := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathbf{0}, \mathbf{x}) \leq 1\}$  (つまり原点  $\mathbf{0} = (0, 0)$  中心, 半径 1 の円の境界と内側)

解答例 (1)  $F^c = \mathbb{R}^2$  は開集合なので, 閉集合の定義より  $F$  は  $\mathbb{R}^2$  の閉集合.

□

(2)  $F^c = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{a}\}$  は開集合なので, 閉集合の定義より  $F$  は  $\mathbb{R}^2$  の閉集合.

□

(3)

$$F^c = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathbf{0}, \mathbf{x}) > 1\}$$

であることに注意する.  $F^c$  が開集合であることを示す. すなわち

$\forall \mathbf{x} \in F^c, \exists \varepsilon_{\mathbf{x}} > 0$  s.t.

$$N(\mathbf{x}; \varepsilon_{\mathbf{x}}) \subset F^c$$

を示せばよい.  $\mathbf{x} \in F^c$  とする.

$$d(\mathbf{0}, \mathbf{x}) > 1$$

より  $\varepsilon_{\mathbf{x}} := d(\mathbf{0}, \mathbf{x}) - 1$  とおくと,  $\varepsilon_{\mathbf{x}} > 0$  である. このとき,

$$N(\mathbf{x}; \varepsilon_{\mathbf{x}}) \subset F^c$$

である. 実際,  $\mathbf{y} \in N(\mathbf{x}; \varepsilon_{\mathbf{x}})$  とすると,  $\varepsilon$ -近傍の定義より  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \varepsilon_{\mathbf{x}}$  である. このとき,

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \varepsilon_{\mathbf{x}} = d(\mathbf{0}, \mathbf{x}) - 1$$

なので, 三角不等式と対称性より

$$\begin{aligned} 1 &< d(\mathbf{0}, \mathbf{x}) - d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &\leq (d(\mathbf{0}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{x})) - d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= d(\mathbf{0}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \\ &= d(\mathbf{0}, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

つまり

$$d(\mathbf{0}, \mathbf{y}) > 1$$

よって,  $\mathbf{y} \in F^c$ .

以上より  $F^c$  は開集合なので,  $F$  は  $\mathbb{R}^2$  の閉集合である. □