

位相入門I・自習シート

問1 $X = \mathbb{R}$, つまり実数とする. $a, b \in X$ に対して

$$d(a, b) := |a - b|$$

と定義する. $a = 4, b = 3, c = 2$ のとき $d(a, b)$ の例をもとに, $d(a, a), d(b, c), d(a, c)$ をそれぞれ求めよ.

$$d(a, b) = |4 - 3| = 1.$$

解答例

$$d(a, a) = |4 - 4| = 0,$$

$$d(b, c) = |3 - 2| = 1,$$

$$d(a, c) = |2 - 4| = |-2| = 2.$$

問2 $X = \mathbb{R}^2$, つまり平面とする. $a, b \in X$ に対して $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2)$ とおき,

$$d_1(a, b) := |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$$

と定義する (マンハッタン距離, L^1 距離). $a = (4, 0), b = (4, 3), c = (2, 2)$ のとき $d_1(a, b)$ の例をもとに, $d_1(a, a), d_1(b, c), d_1(a, c)$ をそれぞれ求めよ.

$$d_1(a, b) = |4 - 4| + |0 - 3| = 3.$$

解答例

$$d_1(a, a) = |4 - 4| + |0 - 0| = 0,$$

$$d_1(b, c) = |4 - 2| + |3 - 2| = 2 + 1 = 3,$$

$$d_1(a, c) = |4 - 2| + |0 - 2| = 2 + 2 = 4.$$

問3 $X := \{ \text{高槻, 京都, 大津, 瀬田} \}$ とする. それぞれ JR の駅を表すとし, その間の運賃は以下の通りとする.

A \ B	高槻	京都	大津	瀬田
高槻	0	410	580	660
京都	410	0	200	320
大津	580	200	0	200
瀬田	660	320	200	0

$A, B \in X$ に対して $d(A, B)$ を上記表の値とする. 例えば A を高槻, B を京都とすると

$$d(\text{高槻}, \text{京都}) = 410.$$

である. $d(\text{大津}, \text{大津}), d(\text{大津}, \text{瀬田}), d(\text{瀬田}, \text{大津})$ をそれぞれ求めよ.

解答例

$$d(\text{大津}, \text{大津}) = 0,$$

$$d(\text{大津}, \text{瀬田}) = 200,$$

$$d(\text{瀬田}, \text{大津}) = 200.$$

注 現実世界では選んだ駅の集合 X によっては、駅間の料金 d が必ずしも X の距離になるわけではない。例えば X に大阪も入れてしまうと、大阪-瀬田間は 960 円だが、大阪-京都間 580 円、京都-瀬田間 320 円つまり

$$d(\text{大阪}, \text{瀬田}) = 960,$$

$$d(\text{大阪}, \text{京都}) = 580, \quad d(\text{京都}, \text{瀬田}) = 320,$$

より

$$d(\text{大阪}, \text{瀬田}) = 960 > 900 = 580 + 320 = d(\text{大阪}, \text{京都}) + d(\text{京都}, \text{瀬田})$$

のように三角不等式を満たさない (なぜかは分からないが京都で途中下車した方が安いという状況が起こっている)。

問 4 $X = \mathbb{R}^2$ とする。 $a, b \in X$ に対して $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ とおき、

$$d_\infty(a, b) := \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}$$

と定義する (チェビシェフ距離, L^∞ 距離)。 $a = (4, 0)$, $b = (4, 3)$, $c = (2, 2)$ のとき $d_\infty(a, b)$ の例をもとに、 $d_\infty(a, a)$, $d_\infty(b, c)$, $d_\infty(a, c)$ をそれぞれ求めよ。

$$d_\infty(a, b) = \max\{|4 - 4|, |0 - 3|\} = 3.$$

解答例

$$d_\infty(a, a) = \max\{|4 - 4|, |0 - 0|\} = 0,$$

$$d_\infty(b, c) = \max\{|4 - 2|, |3 - 2|\} = 2,$$

$$d_\infty(a, c) = \max\{|4 - 2|, |0 - 2|\} = 2.$$