2026/05/12/No.6

位相入門I・自習シート

定義　$\{a_n\}$ を数列, $\alpha \in \mathbb{R}$ とする.

$^\forall\varepsilon > 0, ^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.
$$^\forall n \geq N_\varepsilon, \quad |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

を満たすとき, a_n は α に収束するといい,

$$a_n \to \alpha \quad (n \to +\infty), \quad \text{または} \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha$$

とかく. α のことを a_n の極限値とよぶ.

問　例題を参考に, 一般項が次の様に与えられた数列 $\{a_n\}$ の 0 への収束を ε-N 論法で証明せよ.

(例題) $a_n := \dfrac{1}{n}$

解答例

$^\forall\varepsilon > 0,\ ^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.
$$^\forall n \geq N_\varepsilon,\ \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$
を示せばよい. そこで先に
$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$
となる番号を見積もっておくと
$$\frac{1}{n} < \varepsilon,$$
$$\frac{1}{\varepsilon} < n$$
となる番号であればよい.

$\varepsilon > 0$ とする. アルキメデスの原理より $^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.
$$\frac{1}{\varepsilon} < N_\varepsilon.$$
よって,
$$^\forall n \geq N_\varepsilon, \quad \frac{1}{\varepsilon} < N_\varepsilon \leq n$$
より
$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

このとき

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}-0\right| &= \frac{1}{n} \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

以上により

$$a_n \to 0 \quad (n \to +\infty).$$

(1) $a_n := \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

解答例

$^\forall \varepsilon > 0$, $^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$^\forall n \geq N_\varepsilon,\ \left|\frac{1}{\sqrt{n}}-0\right| < \varepsilon$$

を示せばよい．そこで先に

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n}}-0\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

となる番号を見積もっておくと

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon,$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2} < n$$

となる番号であればよい．

$\varepsilon > 0$ とする．アルキメデスの原理より $^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\frac{1}{\varepsilon^2} < N_\varepsilon.$$

よって

$$^\forall n \geq N_\varepsilon, \quad \frac{1}{\varepsilon^2} < N_\varepsilon \leq n$$

より

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

このとき

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\sqrt{n}}-0\right| &= \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

以上により

$$a_n \to 0 \quad (n \to +\infty).$$

(2) $a_n := \dfrac{1}{2^n}$

解答例

$^\forall\varepsilon > 0,\ ^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$^\forall n \geq N_\varepsilon,\ \left|\frac{1}{2^n} - 0\right| < \varepsilon$$

を示せばよい. そこで先に

$$\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| < \varepsilon$$

となる番号を見積もっておくと

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| &= \frac{1}{2^n}\\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

となる番号であればよい.

$\varepsilon > 0$ とする. アルキメデスの原理より $^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) < N_\varepsilon.$$

よって,

$$^\forall n \geq N_\varepsilon, \quad \log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \leq N_\varepsilon \leq n$$

より

$$\frac{1}{\varepsilon} < 2^n,$$

つまり

$$\frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

このとき

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| &= \frac{1}{2^n}\\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

以上により

$$a_n \to 0 \quad (n \to +\infty).$$

別解

$^\forall\varepsilon > 0,\ ^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$^\forall n \geq N_\varepsilon,\ \left|\frac{1}{2^n} - 0\right| < \varepsilon$$

を示せばよい．そこで先に

$$\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| < \varepsilon$$

となる番号を見積もっておくと，$^\forall n \in \mathbb{N}, n < 2^n$ より

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| &= \frac{1}{2^n} \\ &< \frac{1}{n} \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

となる番号であればよい．

$\varepsilon > 0$ とする．アルキメデスの原理より $^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\frac{1}{\varepsilon} < N_\varepsilon.$$

よって，

$$^\forall n \geq N_\varepsilon, \quad \frac{1}{\varepsilon} \leq N_\varepsilon \leq n$$

より

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

このとき

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| &= \frac{1}{2^n} \\ &< \frac{1}{n} \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

以上により

$$a_n \to 0 \quad (n \to +\infty).$$

(3) $a_n := \dfrac{1}{n}\sin n$

解答例

$^\forall \varepsilon > 0,\ ^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$^\forall n \geq N_\varepsilon,\ \left|\frac{1}{n}\sin n - 0\right| < \varepsilon$$

を示せばよい. そこで先に

$$\left|\frac{1}{n}\sin n - 0\right| < \varepsilon$$

となる番号を見積もっておくと

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\sin n - 0\right| &= \frac{1}{n}|\sin n| \\ &\leq \frac{1}{n} \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

となる番号であればよい.

$\varepsilon > 0$ とする. アルキメデスの原理より $^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\frac{1}{\varepsilon} < N_\varepsilon.$$

よって,

$$^\forall n \geq N_\varepsilon, \quad \frac{1}{\varepsilon} \leq N_\varepsilon \leq n$$

より

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

このとき

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\sin n - 0\right| &= \frac{1}{n}|\sin n| \\ &\leq \frac{1}{n} \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

以上により

$$a_n \to 0 \quad (n \to +\infty).$$