位相入門I・自習シート

問 1　$E_1 \subset E_2 \subset \mathbb{R}$ とし, 空でなく上に有界とする. このとき

$$\sup E_1 \leq \sup E_2$$

を証明せよ.

解答例　$\alpha := \sup E_2$ とおく. α は E_2 の最小上界なので

$$^\forall x \in E_2, x \leq \alpha$$

を満たす. そこで, $y \in E_1$ とする. このとき仮定 $E_1 \subset E_2$ より $y \in E_2$ であるので

$$y \leq \alpha$$

を満たす. y は任意に選べるので, これは α が E_1 の上界の 1 つであることを意味する. 一方, $\sup E_1$ は E_1 の最小上界なので

$$\sup E_1 \leq \alpha = \sup E_2.$$

□

問 2　$E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$ とし, それぞれ空でなく有界とする.

$$E := \{x + y : x \in E_1, y \in E_2\}$$

とおく (つまり, $^\forall z \in E$, $^\exists x_z \in E_1$, $^\exists y_z \in E_2$ s.t. $z = x_z + y_z$). このとき

$$\sup E \leq \sup E_1 + \sup E_2$$

を証明の解答例を参考に

$$\inf E \geq \inf E_1 + \inf E_2$$

を証明せよ.

解答例　E の定義から $^\forall z \in E$, $^\exists x_z \in E_1$, $^\exists y_z \in E_2$ s.t.

$$z = x_z + y_z$$

とかけている. いま, $\alpha := \sup E_1$, $\beta := \sup E_2$ とおくと最小上界の定義より

$$x_z \leq \alpha, \quad y_z \leq \beta$$

を満たす. よって

$$z = x_z + y_z \leq \alpha + \beta$$

を満たす. z は任意に選べるので, これは $\alpha + \beta$ が E の上界の 1 つであることを意味する. 一方, $\sup E$ は E の最小上界なので

$$\sup E \leq \alpha + \beta = \sup E_1 + \sup E_2.$$

□

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

解答例　E の定義から $^\forall z \in E, {}^\exists x_z \in E_1, {}^\exists y_z \in E_2$ s.t.

$$z = x_z + y_z$$

とかけている．いま, $\alpha := \inf E_1,\ \beta := \inf E_2$ とおくと最大下界の定義より

$$x_z \geq \alpha, \quad y_z \geq \beta$$

を満たす．よって

$$z = x_z + y_z \geq \alpha + \beta$$

を満たす．z は任意に選べるので, これは $\alpha + \beta$ が E の下界の 1 つであることを意味する．一方, $\inf E$ は E の最大下界なので

$$\inf E \geq \alpha + \beta = \inf E_1 + \inf E_2.$$

□

問 3　$A, B \subset \mathbb{R}$ を空でなく有界とする．このとき次を証明せよ．

(1) $A \cap B \neq \emptyset$ ならば $\inf A \leq \sup B$.

解答例　$A \cap B \supset A,\ A \cap B \supset B$ に注意する．まず, $A \cap B \supset A$ より

$$\inf A \leq \inf(A \cap B).$$

次に同じ集合 $A \cap B$ に対して

$$\inf(A \cap B) \leq \sup(A \cap B).$$

最後に, $A \cap B \supset B$ より

$$\sup(A \cap B) \leq \sup B.$$

以上より

$$\inf A \leq \inf(A \cap B) \leq \sup(A \cap B) \leq \sup B$$

が成立する (講義で証明した 2 つの定理を組み合わせて証明されている).

(2) $-A := \{-x : x \in A\}$ [1] とおく．このとき

$$\sup(-A) = -\inf A.$$

解答例　$\alpha := \sup(-A)$ とおく．最小上界の定義より

$$\begin{cases} \text{(i)} & {}^\forall x \in (-A), x \leq \alpha; \\ \text{(ii)} & {}^\forall \varepsilon > 0, {}^\exists x_\varepsilon \in (-A) \text{ s.t. } \alpha - \varepsilon < x_\varepsilon. \end{cases}$$

ここで, $y \in A$ とすると, $-y \in (-A)$ なので (i) より

$$-y \leq \alpha,$$

つまり

$$y \geq -\alpha$$

[1] いいかえると $-A := \{z : {}^\exists x \in A \text{ s.t.} z = -x\}$

を満たす. 次に (ii) より $^\forall\varepsilon > 0, ^\exists x_\varepsilon \in (-A)$ s.t. $\alpha - \varepsilon < x_\varepsilon$. つまり

$$-\alpha + \varepsilon > -x_\varepsilon.$$

ここで, $-x_\varepsilon \in A$ なので, $y_\varepsilon := -x_\varepsilon$ とおけば, 以上をまとめると

$$\begin{cases} \text{(i)} & ^\forall y \in E_1, y \geq -\alpha; \\ \text{(ii)} & ^\forall\varepsilon > 0, ^\exists y_\varepsilon \in A \text{ s.t. } -\alpha + \varepsilon > y_\varepsilon. \end{cases}$$

と言える. つまり $-\alpha$ は A の最大下界であるので

$$-\alpha = \inf A,$$

つまり

$$\alpha = -\inf A.$$

□

(3) $^\forall a \in A, ^\forall b \in B$, $a \leq b$ が成立するならば $\sup A \leq \inf B$.

解答例　仮定より, $a \in A$ とすると次が成立する:

$$^\forall b \in B, a \leq b.$$

よって a は B の下界の 1 つである. 一方 $\inf B$ は B の最大下界なので

$$a \leq \inf B$$

が成立する. 次に $a \in A$ は任意に選べるので, 上の式より $\inf B$ は A の上界の 1 つである. 一方 $\sup A$ は最小上界であったので

$$\sup A \leq \inf B$$

を得る. □

(4) $^\forall a \in A$, $^\exists b_a \in B$ s.t. $a \leq b_a$ が成立するならば $\sup A \leq \sup B$.

解答例　$\sup B$ の定義より

$$^\forall b \in B, b \leq \sup B.$$

仮定より, $^\forall a \in A$, $^\exists b_a \in B$ s.t.

$$a \leq b_a$$

であるが, $b_a \in B$ より

$$a \leq b_a \leq \sup B$$

を得る. よって, $\sup B$ は A の上界の 1 つである. 一方 $\sup A$ は最小上界であったので

$$\sup A \leq \sup B$$

を得る. □

注　(3) と (4) の証明の違いをはっきりと理解すべきである．(4) の証明中,

$$^\forall a \in A, ^\exists b_a \in B, \text{s.t. } a \leq b_a$$

が成立するからと言って, b_a が A の上界の 1 つとは言えないことに注意が必要．b_a は a に依存して決まる値である．a が変われば b_a も変わってしまうので b_a がどのような $a \in A$ をも上から押さえる値 (A の上界) とは言えない．a に依存しないそれより大きな $\sup B$ が A の上界の 1 つであると言っている．

問 4　$E \subset \mathbb{R}$ を空でない部分集合とする．$\alpha \in \mathbb{R}$ が

$$\alpha \in E \quad \text{かつ} \quad ^\forall x \in E, \alpha \leq x$$

を満たすとき α を E の最小値とよび $\min E$ とかく．E の最小値が存在するならば

$$\min E = \inf E$$

であることを証明せよ．

解答例　仮定より E は下に有界なので $\inf E \in \mathbb{R}$ が存在する．そこで $\alpha := \min E$, $\beta := \inf E$ とおき, $\alpha = \beta$ を示す．まず, inf の定義から

$$^\forall x \in E, \beta \leq x.$$

ここで, min の定義から $\alpha \in E$ より

$$\beta \leq \alpha.$$

次に, min の定義から α は E の下界の 1 つである．一方 β は E の最大下界であるので

$$\alpha \leq \beta.$$

ゆえに $\alpha = \beta$.　□

別解　$\alpha \leq \beta$ の証明について, inf の定義より, $^\forall \varepsilon > 0$, $^\exists x_\varepsilon \in E$ s.t.

$$\beta + \varepsilon > x_\varepsilon.$$

ここで, α は E の最小値なので

$$\beta + \varepsilon > x_\varepsilon \geq \alpha,$$

すなわち,

$$\alpha < \beta + \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ の任意性より

$$\alpha \leq \beta$$

と示すこともできる．