

位相入門I・自習シート

問1 実数の集合を \mathbb{R} とかく. $E \subset \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ とする. 次の条件や命題の否定を論理記号で書け.

(1) $a < b$.

(2) $a \in \mathbb{R} \setminus E$.

(3) $\forall x \in E, x \leq a$.

(4) $\exists x_0 \in E$ s.t. $x_0 \geq b$.

(5) $\exists k_0 \in \mathbb{R}$ s.t. $\forall x \in E, x \leq k_0$.

解答例 (1) $a \geq b$. (2) $a \in E$. (3) $\exists x_0 \in E$ s.t. $x_0 > a$. (4) $\forall x \in E, x < b$. (5) $\forall k \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in E$ s.t. $x_0 > k$.

解説 (2) 「 $a \in \mathbb{R}$ かつ $a \notin E$ 」の否定なので「 $a \notin \mathbb{R}$ または $a \in E$ 」となるが $a \in \mathbb{R}$ は仮定されているので $a \in E$. (3) 「任意の $x \in E$ に対して $x \leq a$ 」の否定なので, ある $x_0 \in E$ が存在して, それが反例となる. つまり $\exists x_0 \in E$ s.t. $x_0 > a$. (4) 「ある $x_0 \in E$ が存在して $x_0 \geq b$ 」の否定なので, 任意の $x \in E$ に対して $x \geq b$ を満たさないということ, つまり $\forall x \in E, x < b$. ここで, $\forall x_0 \in E, x_0 < b$ でもよいが, わざわざダミーインデックスの x に添え字 0 をつける必要はない.

$$\sum_{k=1}^n k$$

という和の表記を

$$\sum_{k_0=1}^n k_0$$

と書いても間違いではないが 0 をつける必要がないことと同じ. (5) 「ある $k_0 \in \mathbb{R}$ が存在して, 任意の $x \in E$ に対して $x \leq k_0$ 」の否定なので「任意の $k \in \mathbb{R}$ に対して, 『任意の $x \in E$ に対して $x \leq k$ 』が成り立たない」つまり, 「任意の $k \in \mathbb{R}$ に対して, 『ある $x_0 \in E$ が存在して $x_0 > k$ 』」.

注 (5) のように論理記号が複数ある場合の否定を求めるには,

$$\boxed{\exists k \in \mathbb{R} \quad \boxed{\forall x \in E \quad \boxed{x \leq k}}}$$

と本質だけ抽出してその否定,

$$\neg \boxed{\exists k \in \mathbb{R} \quad \boxed{\forall x \in E \quad \boxed{x \leq k}}}$$

を

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{R} \quad \boxed{\exists x \in E \quad \boxed{x > k}}}$$

と論理記号の入れかえと最後の命題の否定によって求め、必要に応じてあらためて $\forall k \in \mathbb{R}$, $\exists x \in E$ s.t. $x > k$ と機械的に得ることもできる. ここで「 \neg 」は否定を表す記号.

また, $\forall k \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in E$ s.t. $x_0 > k$ という書き方について, x_0 は k を選ぶたびに k に依存して変わるものなので, 「 $\forall k \in \mathbb{R}, \exists x_k \in E$ s.t. $x_k > k$ 」のように特別感を x_0 ではなく x_k と k に依存していることを強調する書き方をすることもある (例えば ε - N 論法).

問 2[講義で扱った問題再掲] (ド・モルガンの法則) $\alpha \in I$ とし A_α を集合とする. 次の 2 つの性質が成立することを証明せよ.

(1)

$$\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c.$$

(2)

$$\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c.$$

証明 (1) (C) を示す. $x \in \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c$ とする. 補集合の定義より $x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. つまり,

$$\forall \alpha \in I, \quad x \notin A_\alpha.$$

(実際, もしそうでなければ, $\exists \alpha_0 \in I$ s.t. $x \in A_{\alpha_0}$ となるが, このとき $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ となり矛盾). ゆえに, $x \in A_\alpha^c$ が得られるので

$$x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c.$$

(C) を示す. $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$ とする.

$$\forall \alpha \in I, \quad x \in A_\alpha^c,$$

すなわち, $x \notin A_\alpha$. このとき,

$$x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

(実際, もしそうでなければ, $\exists \alpha_0 \in I$ s.t. $x \in A_{\alpha_0}$ となるが矛盾). ゆえに補集合の定義より

$$x \in \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c.$$

以上より等号成立. □

(2) (C) を示す. $x \in \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c$ とする. 補集合の定義より $x \notin \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$. つまり, $\exists \alpha_0 \in I$ s.t.

$$x \notin A_{\alpha_0}$$

(実際, もしそうでなければ, $\forall \alpha \in I, x \in A_\alpha$ となるが, このとき $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ となり矛盾). ゆえに,

$$x \in A_{\alpha_0}^c$$

が得られるので、和集合の定義より

$$x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_{\alpha}^c.$$

(\supset) を示す. $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_{\alpha}^c$ とする. 和集合の定義より $\exists \alpha_0 \in I$ s.t.

$$x \in A_{\alpha_0}^c,$$

すなわち

$$x \notin A_{\alpha_0}.$$

このとき,

$$x \notin \bigcap_{\alpha \in I} A_{\alpha}$$

(実際, もしそうでなければ, $\forall \alpha \in I, x \in A_{\alpha}$ となるが, $x \notin A_{\alpha_0}$ に矛盾). ゆえに補集合の定義より

$$x \in \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_{\alpha} \right)^c.$$

以上より等号成立. □

問3 X を全体集合とし, $A, B \subset X, A, B \neq \emptyset$ とする. 次の3条件は同値¹⁾であることを示せ.

- (1) $A^c \cup B = X$
- (2) $A \subset B$
- (3) $A \cap B^c = \emptyset$

証明 「(1) ならば (2)」を示す. (1) を仮定する. $\forall x \in A, x \in B$ を示す. $x \in A$ とする. $A \subset X$ より, $x \in X$ なので (1) を用いれば $x \in A^c \cup B$ となる. つまり $x \in A^c$ または $x \in B$. しかし, 今は $x \in A$ を仮定しているので $x \notin A^c$ より $x \in B$. ゆえに $A \subset B$.

「(2) ならば (3)」を示す. (2) を仮定する. 背理法で示す. もしも $A \cap B^c \neq \emptyset$ ならば, $x \in A \cap B^c$ を取ることができる. この元 x は $x \in A$ かつ $x \in B^c$ を満たすが, $A \subset B$ より $x \in B$ かつ $x \in B^c$ となり矛盾. よって $A \cap B^c = \emptyset$.

「(3) ならば (1)」を示す.

(\supset) を示す. $x \in A^c \cup B$ とする. $x \in A^c$ または $x \in B$ である.

(i) $x \in A^c$ のとき, $A^c = X \setminus A \subset X$ より, $x \in X$.

(ii) $x \in B$ のとき, $B \subset X$ より, $x \in X$.

以上より $x \in X$ (もっと簡単に X は全体集合なので $x \in X$ となる, とまとめてしまってもよい). よって $A^c \cup B \subset X$ が成立.

(\supset) を示す. $x \in X$ とする.

(i) $x \in B$ のとき, 和集合の定義より $x \in A^c \cup B$ となる.

¹⁾ 「(1) ならば (2)」, 「(2) ならば (3)」, 「(3) ならば (1)」を3つを示せばよい.

(ii) $x \notin B$ のとき, $x \in B^c$ であるが, さらに $x \notin A$ となる. 実際, もしそうでないならば $x \in B^c$ かつ $x \in A$ となるが, 共通部分の定義より $x \in A \cap B^c$ となり, (3) に矛盾する. ゆえに $x \in A^c$ を得るので, 和集合の定義より $x \in A^c \cup B$ となる.

いずれの場合にも $x \in A^c \cup B$ となり, $A^c \cup B \supset X$ を得る.

以上により (1) の等号が成立する.

ゆえに 3 条件は同値となる. □

「(3) ならば (1)」の別解 (3) を仮定する. ド・モルガンの法則より

$$(A \cap B^c)^c = A^c \cup B$$

であり, $\emptyset^c = X$ より (1) が成立. □