2026/04/14/No.3

位相入門I・自習シート

問1　a, b, c, d, e の5つの文字からなる次の集合を考える.

$$A_1 := \{a, b, c\}, \quad A_2 := \{a, b, d\}, \quad A_3 := \{a, b, d, e\}$$

(1) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ について, その元をすべて列挙すれば

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{a, b, c, d, e\}$$

となる. 同じようにすべての元を列挙する方法で $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ を求めよ.

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{a, b\}$$

(2) $I := \{1, 2, 3\}$ とおくことで $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ は

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

とかくこともできる. 例を参考に, $x = b,\ c,\ d,\ e$ に対して,

$$x \in A_{\alpha_0}$$

となる $\alpha_0 \in I$ をそれぞれ**すべて**求めよ.

(例) $x = a$ のとき, a は $A_1,\ A_2,\ A_3$ のどの集合にも属しているので $x \in A_{\alpha_0}$ となる α_0 は $\alpha_0 = 1, 2, 3$ の3つである.

(i) $x = b$ のとき, $x \in A_{\alpha_0}$ となる $\alpha_0 \in I$ は $\alpha_0 = 1, 2, 3$

(ii) $x = c$ のとき, $x \in A_{\alpha_0}$ となる $\alpha_0 \in I$ は $\alpha_0 = 1$

(iii) $x = d$ のとき, $x \in A_{\alpha_0}$ となる $\alpha_0 \in I$ は $\alpha_0 = 2, 3$

(iv) $x = e$ のとき, $x \in A_{\alpha_0}$ となる $\alpha_0 \in I$ は $\alpha_0 = 3$

問2　A_α, B を集合とする (ただし $\alpha \in I$ で I は添え字集合). 次を証明せよ.

(3)

$$B \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (B \cap A_\alpha).$$

(2)

$$B \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (B \setminus A_\alpha).$$

(3)

$$B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (B \cup A_\alpha).$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で60点以上取れば合格です.

証明　(1) ($\subset$) を示す． $x \in B \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)$ とする． 共通部分の定義より $x \in B$ かつ $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, つまり, 和集合の定義より $\exists \alpha_0 \in I$ s.t. $x \in A_{\alpha_0}$. よって, $x \in B \cap A_{\alpha_0}$ が得られる．ゆえに和集合の定義より

$$x \in \bigcup_{\alpha \in I} (B \cap A_\alpha).$$

($\supset$) を示す．$x \in \bigcup_{\alpha \in I} (B \cap A_\alpha)$ とする．和集合の定義より $\exists \alpha_0 \in I$ s.t. $x \in B \cap A_{\alpha_0}$. よって, $x \in B$ かつ $x \in A_{\alpha_0}$. 再び和集合の定義より $x \in B$ かつ $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. よって

$$x \in B \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right).$$

以上により等号成立. $\square$

(2) ($\subset$) を示す．$x \in B \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right)$ とする．差の定義より $x \in B$ かつ $x \notin \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$, つまり, $\exists \alpha_0 \in I$ s.t. $x \notin A_{\alpha_0}$ が成立する (実際, もしそうでないならば, $\forall \alpha \in I$, $x \in A_\alpha$ となるが, そのとき $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ となり矛盾). つまり, $x \in B \setminus A_{\alpha_0}$. よって, 和集合の定義より

$$x \in \bigcup_{\alpha \in I} (B \setminus A_\alpha).$$

($\supset$) を示す．$x \in \bigcup_{\alpha \in I} (B \setminus A_\alpha)$ とする．和集合の定義より $\exists \alpha_0 \in I$ s.t. $x \in B \setminus A_{\alpha_0}$. よって, $x \in B$ かつ $x \notin A_{\alpha_0}$, つまり $x \notin \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ (実際, もしそうでないならば, $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ となるが, そのとき, $\forall \alpha \in I$, $x \in A_\alpha$ となり矛盾). よって

$$x \in B \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right).$$

以上により等号成立. $\square$

(3) ($\subset$) を示す．$x \in B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right)$ とする．和集合の定義より $x \in B$ または $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$.
(i) $x \in B$ のとき, $\forall \alpha \in I$, $x \in B \cup A_\alpha$. よって共通部分の定義より

$$x \in \bigcap_{\alpha \in I} (B \cup A_\alpha).$$

(ii) $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ のとき, $\forall \alpha \in I$, $x \in A_\alpha$. よって $x \in B \cup A_\alpha$. つまり共通部分の定義より

$$x \in \bigcap_{\alpha \in I} (B \cup A_\alpha).$$

(i), (ii) より

$$x \in \bigcap_{\alpha \in I} (B \cup A_\alpha).$$

($\supset$) を示す．$x \in \bigcap_{\alpha \in I} (B \cup A_\alpha)$ とする．共通部分の定義より $\forall \alpha \in I$, $x \in B \cup A_\alpha$.
(i) $x \in B$ のとき, $x \in B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right)$.
(ii) $x \notin B$ のとき, $\forall \alpha \in I$, $x \in A_\alpha$(実際, もしそうでないなら, $\exists \alpha_0 \in I$ s.t. $x \notin A_{\alpha_0}$. しかし, $x \notin B$ より $x \notin B \cup A_{\alpha_0}$ となり矛盾). よって $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$. すなわち

$$x \in B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right).$$

(i), (ii) より

$$x \in B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right).$$

以上より等号成立. □

問 3 (3) の注

(⊃) を示す. $x \in \bigcap_{\alpha \in I}(B \cup A_\alpha)$ とする. 共通部分の定義より $\forall \alpha \in I, x \in B \cup A_\alpha$.
(i) $x \in B$ のとき...
(ii) $x \in A_\alpha$ のとき...

と場合分けしてしまうと, 結論にたどり着けない. **すべての (任意の)**$\alpha \in I$ **に対して**
(i) $x \in B$ のとき...
(ii) $x \in A_\alpha$ のとき...
と場合分けすることはできるが, (ii) のとき $x \in A_\alpha$ だからといって,

$$x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$$

と結論づけることはできないからである. 一見すると「**すべての** $\alpha \in I$ **に対して**」と言っているので良さそうだが, 論理構造は次の通りである.

すべての $\alpha \in I$ **に対して** α **を止めるたびに**
(i) $x \in B$ のとき...$x \in B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right)$.(ii) $x \in A_\alpha$ のとき... !?

内側の四角の中で (ii) においても, $x \in B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right)$ という結論まで得なければならないが, $x \in B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right)$ は**すべての** $\alpha \in I$ **に対して** α **を止めるたびに**得られる結論ではない. 前回の講義で証明した

$$B \cup (A_1 \cap A_2) = (B \cup A_1) \cap (B \cup A_2)$$

の形を思い出すとよい. (⊃) を示す際に, $x \in (B \cup A_1) \cap (B \cup A_2)$ とすると, $x \in B \cup A_1$ かつ $x \in B \cup A_2$ に場合分けでき, これを ($x \in B$ または $x \in A_1$) かつ ($x \in B$ または $x \in A_2$) と書いてみる. ここで, $I = \{1, 2\}$ とおくと

すべての $\alpha \in I$ **に対して** α **を止めるたびに**
(i) $x \in B$ のとき...(ii) $x \in A_\alpha$ のとき...

とは

$\alpha = 1$ **に対して**
(i) $x \in B$ のとき...(ii) $x \in A_1$ のとき...
$\alpha = 2$ **に対して**
(1) $x \in B$ のとき...(2) $x \in A_2$ のとき...

と, **すべての** $\alpha \in I$ **に対して** α **を止めるたびに場合分けを**議論することと同じである. (ii)

の場合に, $x \in A_1$ から $x \in A_1 \cap A_2$ と結論づけることは (ii)–(2) の組み合わせのときにしかできない. (ii)–(1) の組み合わせのときには $x \in A_1 \cap A_2$ と結論づけることはできない.