2026/04/07/No.2

位相入門I・自習シート

問 1 $E \subset \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とする．例題をもとに次の命題の否定を論理式で述べよ．

(例 1) $\forall x \in E,\ x \leq \alpha.$

解答例　$\exists x \in E \text{ s.t. } x > \alpha.$

考え方 1　$\forall x \in E,\ x \leq \alpha$ とは「すべての $x \in E$ に対して $x \leq \alpha$」という意味である．これを否定すると「$x \leq \alpha$ を満たさない反例が E に存在する」ということなので「ある $x \in E$ が存在して $x > \alpha$」となる．よって

$$\exists x \in E \text{ s.t. } x > \alpha$$

となる．

考え方 2　機械的に「$\forall$」や「$\exists$— s.t.」と最後の命題 P の区切りごとに箱で分けて考えると

$$\boxed{\forall x \in E\ \boxed{x \leq \alpha}}$$

となる．ここで最後の命題 P とは $x \leq \alpha$ の部分を意味する．この否定

$$\neg\ \boxed{\forall x \in E\ \boxed{x \leq \alpha}}$$

は (ただし $\neg$ の記号は否定を表す記号である), 機械的に「$\forall$」を「$\exists$」に,「$\exists$」を「$\forall$」に入れ換え, 最後の命題 P を否定することで, 次のように得られる．

$$\boxed{\exists x \in E\ \boxed{x > \alpha}}$$

よってこれを書き直して ($\exists$ の最後に付く「s.t.」を付け加えて)

$$\exists x \in E \text{ s.t. } x > \alpha$$

となる．

(例 2) $\exists y \in E \text{ s.t. } y \geq \beta.$

解答例　$\forall y \in E,\ y < \beta.$

考え方 1　$\exists y \in E \text{ s.t. } y \geq \beta$ とは「ある $y \in E$ が存在して $y \geq \beta$」という意味である．これを否定すると「$y \geq \beta$ を満たすような E の元 y は存在しない」ということなので「すべての $y \in E$ に対して $y < \beta$」となる．よって

$$\forall y \in E,\ y < \beta$$

となる．

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと．提出しなくても試験で 60 点以上取れれば合格です．

考え方 2　機械的に「∀」や「∃— s.t.」と最後の命題 P の区切りごとに箱で分けて考えると (s.t. は省略する)

$$\boxed{\exists y \in E \ \boxed{y \geq \beta}}$$

となる．ここで最後の命題 P とは $y \geq \beta$ の部分を意味する．この否定

$$\neg \ \boxed{\exists y \in E \ \boxed{y \geq \beta}}$$

は, 機械的に「∀」を「∃」に, 「∃」を「∀」に入れ換え, 最後の命題 P を否定することで,

$$\boxed{\forall y \in E \ \boxed{y < \beta}}$$

となる．よって

$$\forall y \in E,\, y < \beta$$

となる．

(1) $\exists k \in \mathbb{Z}$ s.t. $\alpha = 2k$.

解答例　$\forall k \in \mathbb{Z},\, \alpha \neq 2k$.

考え方　機械的に「∀」や「∃— s.t.」と最後の命題 P の区切りごとに箱で分けて考えると

$$\boxed{\exists k \in \mathbb{Z} \ \boxed{\alpha = 2k}}$$

となる．この否定

$$\neg \ \boxed{\exists k \in \mathbb{Z} \ \boxed{\alpha = 2k}}$$

は, 機械的に「∀」を「∃」に, 「∃」を「∀」に入れ換え, 最後の命題 P を否定することで,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{Z} \ \boxed{\alpha \neq 2k}}$$

となる．よって

$$\forall k \in \mathbb{Z},\, \alpha \neq 2k$$

となる．

(2) $\forall x \in E,\, \exists k \in \mathbb{Z}$ s.t. $x = 2k$.

解答例　$\exists x \in E$ s.t. $\forall k \in \mathbb{Z},\, x \neq 2k$.

考え方　機械的に「∀」や「∃— s.t.」と最後の命題 P の区切りごとに箱で分けて考えると

$$\boxed{\forall x \in E \ \boxed{\exists k \in \mathbb{Z} \ \boxed{x = 2k}}}$$

となる．この否定

$$\neg \ \boxed{\forall x \in E \ \boxed{\exists k \in \mathbb{Z} \ \boxed{x = 2k}}}$$

は, 機械的に「$\forall$」を「$\exists$」に, 「$\exists$」を「$\forall$」に入れ換え, 最後の命題 P を否定することで,

$$\boxed{\exists x \in E \ \boxed{\forall k \in \mathbb{Z} \ \boxed{x \neq 2k}}}$$

となる. よって

$$\exists x \in E \text{ s.t. } \forall k \in \mathbb{Z},\ x \neq 2k$$

となる.

(3) $\forall x \in E,\ \alpha - 1 \geq x.$

解答例　$\exists x \in E$ s.t. $\alpha - 1 < x.$

考え方　機械的に「$\forall$」や「$\exists$— s.t.」と最後の命題 P の区切りごとに箱で分けて考えると

$$\boxed{\forall x \in E \ \boxed{\alpha - 1 \geq x}}$$

となる. この否定

$$\neg \ \boxed{\forall x \in E \ \boxed{\alpha - 1 \geq x}}$$

は, 機械的に「$\forall$」を「$\exists$」に, 「$\exists$」を「$\forall$」に入れ換え, 最後の命題 P を否定することで,

$$\boxed{\exists x \in E \ \boxed{\alpha - 1 < x}}$$

となる. よって

$$\exists x \in E \text{ s.t. } \alpha - 1 < x$$

となる.

(4) $\exists \varepsilon > 0$ s.t. $\forall x \in E,\ \alpha - \varepsilon \geq x.$

解答例　$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in E$ s.t. $\alpha - \varepsilon < x.$

考え方　機械的に「$\forall$」や「$\exists$— s.t.」と最後の命題 P の区切りごとに箱で分けて考えると

$$\boxed{\exists \varepsilon > 0 \ \boxed{\forall x \in E \ \boxed{\alpha - \varepsilon \geq x}}}$$

となる. この否定

$$\neg \ \boxed{\exists \varepsilon > 0 \ \boxed{\forall x \in E \ \boxed{\alpha - \varepsilon \geq x}}}$$

は, 機械的に「$\forall$」を「$\exists$」に, 「$\exists$」を「$\forall$」に入れ換え, 最後の命題 P を否定することで,

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \boxed{\exists x \in E \ \boxed{\alpha - \varepsilon < x}}}$$

となる. よって

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in E \text{ s.t. } \alpha - \varepsilon < x$$

となる.

問 2 A を空でない集合とする. **集合の等号の定義に従って**次を証明せよ.

(1) $A \cup A = A$.

解答例 ($\subset$) を示す. $x \in A \cup A$ とする. 和集合の定義より, $x \in A$ または $x \in A$. つまりこれは $x \in A$ を意味する. よって, ($\subset$) が成立する.

($\supset$) を示す. $x \in A$ とする. このとき, $x \in A$ または $x \in A$ と言い換えられる. つまり和集合の定義より, $x \in A \cup A$ を意味する. よって, ($\supset$) が成立する.

以上より等号が成立する.

(2) $A \cap A = A$.

解答例 ($\subset$) を示す. $x \in A \cap A$ とする. 共通部分の定義より, $x \in A$ かつ $x \in A$. つまりこれは $x \in A$ を意味する. よって, ($\subset$) が成立する.

($\supset$) を示す. $x \in A$ とする. このとき, $x \in A$ かつ $x \in A$ と言い換えられる. つまり共通部分の定義より, $x \in A \cap A$ を意味する. よって, ($\supset$) が成立する.

以上より等号が成立する.

問 3 A, B を空でない集合とし, $A \subset B$ を仮定する. **集合の等号の定義に従って**次を証明せよ.

(1) $A \cup B = B$.

解答例 ($\subset$) を示す. $x \in A \cup B$ とする. 和集合の定義より, $x \in A$ または $x \in B$.

(i) $x \in A$ のとき, 仮定より $A \subset B$ なので, $x \in B$ が成立する.

(ii) $x \in B$ のとき, $x \in B$ は成立している.

よって, ($\subset$) が成立する.

($\supset$) を示す. $x \in B$ とする. このとき, $x \in A$ または $x \in B$ である. つまり和集合の定義より, $x \in A \cup B$ が成立する. よって, ($\supset$) が成立する.

以上より等号が成立する.

(2) $A \cap B = A$.

解答例　($\subset$) を示す．$x \in A \cap B$ とする．共通部分の定義より, $x \in A$ かつ $x \in B$．ゆえに $x \in A$ なので, ($\subset$) が成立する．

($\supset$) を示す．$x \in A$ とする．仮定より $A \subset B$ なので, $x \in B$ が成立する．つまり, $x \in A$ かつ $x \in B$ が成立する．共通部分の定義より, $x \in A \cap B$ が成立する．よって, ($\supset$) が成立する．

以上より等号が成立する．