

位相入門II・自習シート

問1 次で定義される $J \subset \mathbb{R}$ に対して, 内部, 外部, 境界, 閉包をそれぞれ求めよ.

(1) $J = (0, 1]$

(2) $J = (0, 1)$

(3) $J = \{x \in [0, 1) : x \in \mathbb{Q}\}$

(4) $J = \mathbb{Q}$

解答例 (1) $J^i = (0, 1)$, $J^e = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$, $\partial J = \{0, 1\} (= \{0\} \cup \{1\})$, $\bar{J} = [0, 1]$.

(2) $J^i = (0, 1)$, $J^e = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$, $\partial J = \{0, 1\}$, $\bar{J} = [0, 1]$. (1) と同じである.

(3) $J^i = \emptyset$, $J^e = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$, $\partial J = [0, 1]$, $\bar{J} = [0, 1]$.

(4) $J^i = \emptyset$, $J^e = \emptyset$, $\partial J = \mathbb{R}$, $\bar{J} = \mathbb{R}$.

問2 次で定義される $A \subset \mathbb{R}^2$ に対して, 内部, 外部, 境界, 閉包をそれぞれ求めよ.

(1) $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1^2 + x_2^2 < 1\}$

(2) $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$

(3) $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 \geq 0, x_1^2 + x_2^2 < 1\}$

解答例 (1) $A^i = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1^2 + x_2^2 < 1\}$,

$$A^e = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 > 1\},$$

$$\partial A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\} \cup \{(0, 0)\}.$$

(2) $A^i = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1^2 + x_2^2 < 1\}$,

$$A^e = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 > 1\},$$

$\partial A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\} \cup \{(0, 0)\}$. (1) と同じである.

(3) $A^i = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0, x_1^2 + x_2^2 < 1\}$,

$A^e = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, x_2 > 0, x_1^2 + x_2^2 > 1\} \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 < 0\} \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 < 0\}$ (集合は同じでも表現は一意的ではない. 第一象限では円の外側, 残り第二象限から第四象限まで),

$\partial A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0, x_1^2 + x_2^2 = 1\} \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0, x_2 \in [0, 1]\} \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in (0, 1], x_2 = 0\}$ (集合は同じでも表現は一意的ではない),

$$\bar{A} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}.$$

問3 $A, B \subset \mathbb{R}^2$ とする. $A \subset B$ ならば $\overline{A} \subset \overline{B}$ を証明せよ.

解答例 $x \in \overline{A}$ とする. 閉包の定義より x は A の触点, すなわち, $\forall \varepsilon > 0, N(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.
よって, $y \in N(x; \varepsilon) \cap A$ がとれる. つまり, $y \in N(x; \varepsilon)$ かつ $y \in A$. 仮定 $A \subset B$ より,
 $y \in B$ なので, $N(x; \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$. つまり, x は B の触点である. よって $x \in \overline{B}$.

問4 $A, B \subset \mathbb{R}^2$ とする.

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

を証明せよ.

解答例 (C) を示す. $x \in \overline{A \cup B}$ とする. 閉包の定義より x は $A \cup B$ の触点, すなわち, $\forall \varepsilon > 0, N(x; \varepsilon) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$. よって, $y \in N(x; \varepsilon) \cap (A \cup B)$ がとれる. つまり, $y \in N(x; \varepsilon)$ かつ $y \in A \cup B$, すなわち, $y \in A$, または $y \in B$ である.

(i) $y \in A$ のとき, $y \in N(x; \varepsilon)$ より $y \in N(x; \varepsilon) \cap A$, つまり x は A の触点, よって $x \in \overline{A}$.
ゆえに

$$x \in \overline{A} \cup \overline{B}.$$

(ii) $y \in B$ のとき, $y \in N(x; \varepsilon)$ より $y \in N(x; \varepsilon) \cap B$, つまり x は B の触点, よって $x \in \overline{B}$.
ゆえに

$$x \in \overline{A} \cup \overline{B}.$$

(i), (ii) より, $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ が示された.

(D) を示す. $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ とする. 和集合の定義より $x \in \overline{A}$, または $x \in \overline{B}$.

(i) $x \in \overline{A}$ のとき, 閉包の定義より x は A の触点, よって, $\forall \varepsilon > 0, N(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. よって,
 $y \in N(x; \varepsilon) \cap A$ がとれる. つまり, $y \in N(x; \varepsilon)$ かつ $y \in A$, すなわち, $y \in A \cup B$. ゆえに
 $N(x; \varepsilon) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$ といえる. 以上より, $x \in \overline{A \cup B}$.

(ii) $x \in \overline{B}$ のとき, 閉包の定義より x は B の触点, よって, $\forall \varepsilon > 0, N(x; \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$. よつ
て, $y \in N(x; \varepsilon) \cap B$ がとれる. つまり, $y \in N(x; \varepsilon)$ かつ $y \in B$, すなわち, $y \in A \cup B$. ゆ
えに $N(x; \varepsilon) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$ といえる. 以上より, $x \in \overline{A \cup B}$.

(i), (ii) より $\overline{A \cup B} \supset \overline{A} \cup \overline{B}$ が示された.

ゆえに等号成立. □

問4 $A \subset \mathbb{R}^2$ とする. $\overline{A}$ は A を含む最小の閉集合であることを証明せよ.

解答例 $B \supset A$ を $\mathbb{R}^2$ の閉集合とする. このとき, $\overline{A} \subset B$ を示すことで, $\overline{A}$ が A を含む閉集
合の中で最小であることを示す. そこで, 対偶に相当する $(\overline{A})^c \supset B^c$ を示す. $x \in B^c$ とす
る. B は閉集合なので B^c は開集合である. よって $\exists \varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x; \varepsilon_x) \subset B^c.$$

ここで, $A \subset B$ なので $A^c \supset B^c$ から,

$$N(x; \varepsilon_x) \subset A^c$$

といえる. つまり, x は A の外点である. よって, $x \in A^c$. $(\overline{A})^c = A^e$ なので $x \in (\overline{A})^c$, つま
り, $B^c \subset (\overline{A})^c$. これより $\overline{A} \subset B$ が得られた. まとめると, A を含むどのような閉集合 B を
えらんできても, $\overline{A} \subset B$ となるので, $\overline{A}$ が閉集合 (補集合が開集合) であることから, $\overline{A}$ は
 A を含む最小の閉集合であるといえる. □