

位相入門II・自習シート

定義 $A \subset \mathbb{R}^2$, $x \in \mathbb{R}^2$ とする.

点 x が A の内点である. $\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists \varepsilon > 0 \text{ s.t. } N(x; \varepsilon) \subset A.$

点 x が A の外点である. $\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists \varepsilon > 0 \text{ s.t. } N(x; \varepsilon) \subset A^c.$

さらに

$$A^i := \{x \in A : \text{点 } x \text{ が } A \text{ の内点}\},$$

$$A^e := \{x \in A^c : \text{点 } x \text{ が } A \text{ の外点}\}$$

とおき, それぞれ A の内部 (interior), A の外部 (exterior) とよぶ. 定義より $A^i \subset A$, $A^e \subset A^c$ が成立する.

問1 次の集合 A , B の内部と外部をそれぞれ求めよ.

$$A := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_1 > 0\},$$

$$B := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 < 1, 0 < x_2 \leq 1\}.$$

解答例

$$A^i = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1, x_1 > 0\}.$$

一方, A の外部は A^c の内部なので

$$A^e = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 > 1, x_1 < 0\}.$$

次に

$$B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 \leq 1\}.$$

一方, B の外部は B^c の内部なので

$$\begin{aligned} B^e &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 < 0\} \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 1\} \\ &\cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 1, x_2 < 0\} \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 1, x_2 > 1\}. \end{aligned}$$

問2 $A \subset \mathbb{R}^2$, $x \in \mathbb{R}^2$ とする. $\forall \varepsilon > 0, N(x; \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$ ならば $x \notin A^i$ であることを**対偶**を用いて証明せよ.

証明 対偶を示す. すなわち $x \in A^i$ ならば $\exists \varepsilon_0 > 0 \text{ s.t. } N(x; \varepsilon_0) \cap A^c = \emptyset$ を示せばよい. $x \in A^i$ とすると内部の定義より, 点 x は A の内点なので $\exists \varepsilon_0 > 0 \text{ s.t. } N(x; \varepsilon_0) \subset A$. よって, $N(x; \varepsilon_0) \cap A^c = \emptyset$. ゆえに成立. $\square$

問3 $A \subset \mathbb{R}^2$, $x \in \mathbb{R}^2$ とする.

点 x が A の境界点である. $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0, N(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ かつ $N(x; \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$.

と定義する. このとき,

点 x が A の境界点である. $\iff x \notin A^e$ かつ $x \notin A^i$.

が成立することを示せ. ただし, 今回の問2と前回の自習シート問3の結果を用いてもよい.

解答例 $(\implies)$ を示す. 点 x が A の境界点であると仮定する. 定義より $\forall \varepsilon > 0, N(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ かつ $N(x; \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$ が成立する. 前回の問3より $x \notin A^e$, 問2より $x \notin A^i$ が成立. よって $x \notin A^e$ かつ $x \notin A^i$ が成立する.

$(\impliedby)$ を示す. $x \notin A^e$ かつ $x \notin A^i$ を仮定する. $x \notin A^e$ より, x は A の外点ではないので, 外点の定義を否定して, $\forall \varepsilon > 0, N(x; \varepsilon) \not\subset A^c$. すなわち, $N(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. 同時に, $x \notin A^i$ より, x は A の内点ではないので, 内点の定義を否定して, $\forall \varepsilon > 0, N(x; \varepsilon) \not\subset A$. すなわち, $N(x; \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$. よって x が A の境界点であることの定義を満たす. $\square$