位相入門 II・自習シート

$A \subset \mathbb{R}^2$ とする．A の内部 A^i は

$$A^i := \{x \in A :^\exists \varepsilon_x > 0 \text{ s.t. } N(x;\varepsilon_x) \subset A\}$$

で定義される．つまり A の内部 A^i とは A の内点全体の集合である．A がどのような集合であっても，A^i は $\mathbb{R}^2$ の開集合となる．なぜなら，A^i の任意の点 $x \in A^i$ は $^\exists\varepsilon_x > 0$ s.t. $N(x;\varepsilon_x) \subset A$ を満たすので開集合の定義を満たすからである．

問 1 $A, B \subset \mathbb{R}^2$ とする．次を証明せよ．

$$(A \cap B)^i = A^i \cap B^i.$$

証明　($\subset$) を示す．$x \in (A \cap B)^i$ とする．内部の定義より点 x は $A \cap B$ の内点である．よって $^\exists\varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x;\varepsilon_x) \subset A \cap B.$$

つまり，

$$N(x;\varepsilon_x) \subset A, \quad \text{かつ} \quad N(x;\varepsilon_x) \subset B$$

といえる．これは点 x が A の内点かつ B の内点であることを意味するので $x \in A^i$ かつ $x \in B^i$ となり，

$$x \in A^i \cap B^i.$$

よって

$$(A \cap B)^i \subset A^i \cap B^i.$$

($\supset$) を示す．$x \in A^i \cap B^i$ とすると，共通部分の定義より $x \in A^i$ かつ $x \in B^i$．内部の定義より点 x は A の内点かつ B の内点であるので $^\exists\varepsilon_A, \varepsilon_B > 0$ s.t.

$$N(x;\varepsilon_A) \subset A \quad \text{かつ} \quad N(x;\varepsilon_B) \subset B.$$

そこで，$\varepsilon_x := \min\{\varepsilon_A, \varepsilon_B\}$ とおくと，$\varepsilon_x > 0$ であり

$$N(x;\varepsilon_x) \subset A \quad \text{かつ} \quad N(x;\varepsilon_x) \subset B$$

となり，

$$N(x;\varepsilon_x) \subset A \cap B.$$

これは点 x が $A \cap B$ の内点であることを意味するので，

$$x \in (A \cap B)^i.$$

よって

$$(A \cap B)^i \supset A^i \cap B^i.$$

提出する場合は，解答例を参考にして自分で採点をしておくこと．提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です．

以上より等号が成立. $\square$

問 2 $A \subset \mathbb{R}^2$ とし, B は $B \subset A$ を満たすような $\mathbb{R}^2$ の開集合とする. このとき, $B \subset A^i$ を証明せよ [1]

解答例 $B \subset A$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合とする. $x \in B$ とする. B は開集合なので $^\exists \varepsilon_x > 0$ s.t.

$$N(x; \varepsilon_x) \subset B.$$

ここで, $B \subset A$ なので,

$$N(x; \varepsilon_x) \subset A$$

といえる. つまり, x は A の内点である. よって, $x \in A^i$. つまり, $B \subset A^i$. $\square$

注 この結果を言い換える, A に含まれるどのような開集合 B をえらんできても, $B \subset A^i$ となるので, A^i が開集合であることから, A^i は A に含まれる最大の開集合といえる.

問 3 $A \subset \mathbb{R}^2$, $x \in \mathbb{R}^2$ とする. 次の問いに答えよ.

(1) 命題「$^\forall \varepsilon > 0$, $N(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ ならば $x \notin A^e$」の対偶を論理記号で書け.

(2) 上記 (1) の対偶を示すことで命題「$^\forall \varepsilon > 0$, $N(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ ならば $x \notin A^e$」を証明せよ.

解答例 (1) 「P ならば Q」の対偶は「Q でないならば P でない」である. よって「$^\forall \varepsilon > 0$, $N(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ ならば $x \notin A^e$」の対偶は「$x \in A^e$ ならば $^\exists \varepsilon_x > 0$ s.t. $N(x; \varepsilon_x) \cap A = \emptyset$」となる.
(2) 対偶を示す. すなわち「$x \in A^e$ ならば $^\exists \varepsilon_x > 0$ s.t. $N(x; \varepsilon_x) \cap A = \emptyset$」を示せばよい. $x \in A^e$ とすると外部の定義より, 点 x は A の外点なので $^\exists \varepsilon_0 > 0$ s.t. $N(x; \varepsilon_0) \subset A^c$. よって, $N(x; \varepsilon_0) \cap A = \emptyset$.

[1] この事実は A の内部 A^i は A に含まれる最大の開集合であることを意味する. A に含まれるどのような開集合 B をえらんできても, $B \subset A^i$ となるので, A^i が開集合であることから, A^i は A に含まれる最大の開集合といえる.