2026/05/22/No.1

位相入門I・自習シート

定義　A, B を集合とする．「任意の (すべての)$x \in A$ に対して $x \in B$」が成立するとき $A \subset B$ または $B \supset A$ とかく．「$A \subset B$ かつ $A \supset B$」が成立するとき $A = B$ と定義する．

定義　A, B を集合とする．

$$A \cup B := \{x : x \in A \text{ または } x \in B\},$$
$$A \cap B := \{x : x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$

と定義し，それぞれ A と B の和集合，A と B の共通部分とよぶ．

問 1 [集合論の復習]　A, B, C を集合とする．**集合の等号の定義に従って**次を証明せよ．

(1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

解答例　($\subset$) を示す．$x \in A \cap (B \cup C)$ とする．共通部分の定義より $x \in A$ かつ $x \in B \cup C$，すなわち $x \in B$ または $x \in C$ が和集合の定義より成立する．

(i) $x \in B$ のとき，$x \in A$ かつ $x \in B$ であるので $x \in A \cap B$ である．ゆえに

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

(ii) $x \in C$ のとき，$x \in A$ かつ $x \in C$ であるので $x \in A \cap C$ である．ゆえに

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

(i)(ii) より

$$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

($\supset$) を示す．$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ とする．和集合の定義より $x \in A \cap B$ または $x \in A \cap C$ が成立する．

(i) $x \in A \cap B$ のとき，共通部分の定義より $x \in A$ かつ $x \in B$，すなわち $x \in B \cup C$ である．ゆえに

$$x \in A \cap (B \cup C).$$

(ii) $x \in A \cap C$ のとき，共通部分の定義より $x \in A$ かつ $x \in C$，すなわち $x \in B \cup C$ である．ゆえに

$$x \in A \cap (B \cup C).$$

(i)(ii) より

$$A \cap (B \cup C) \supset (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

以上より，($\subset$) と ($\supset$) が証明されたので等号が成立する．　□

提出する場合は，解答例を参考にして自分で採点をしておくこと．提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です．

(2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

解答例　($\subset$) を示す．$x \in A \cup (B \cap C)$ とする．和集合の定義より $x \in A$ または $x \in B \cap C$.

(i) $x \in A$ のとき, $x \in A \cup B$ かつ $x \in A \cap C$ と言える．よって共通部分の定義より

$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

(ii) $x \in B \cap C$ のとき, 共通部分の定義より $x \in B$ かつ $x \in C$, すなわち $x \in A \cup B$ かつ $x \in A \cup C$ が言える．よって共通部分の定義より

$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

(i), (ii) より $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ が成立するので

$$A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

が成立する．

($\supset$) を示す．$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ とする．共通部分の定義より $x \in A \cup B$ かつ $x \in A \cup C$ が言える．

(i) $x \in A$ のとき, $x \in A \cup (B \cap C)$ と言える．よって

$$x \in A \cup (B \cap C).$$

(ii) $x \notin A$ のとき, $x \in A \cup B$ かつ $x \in A \cup C$ より $x \in B$ かつ $x \in C$ が成立する．共通部分の定義より $x \in B \cap C$ が成立するので, よって

$$x \in A \cup (B \cap C).$$

(i), (ii) より $x \in A \cup (B \cap C)$ が成立するので

$$A \cup (B \cap C) \supset (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

が成立する．

以上より, ($\subset$) と ($\supset$) が証明されたので等号が成立する．　$\square$

注意 1　「(1) 任意の $x \in A$ に対して, 」「(2) $^\forall x \in A$ に対して,」「(3) $^\forall x \in A$,」や「(4) $x \in A$ とする.」の書き出しの違いについて．$^\forall$ の記号は「for all」という言葉の省略形であり, (2) は「for all $x \in A$, 」という英語, つまり (1) の「任意の $x \in A$ に対して, 」という意味で用いている．(2) については揚げ足をとると「『任意の $x \in A$ に対して』に対して」のように二重になっていると言えなくもないが, 書き手の好みで (2) もしくは (3) を用いることがある．ここでは, (1), (2), (3) の最後がピリオドではなくコンマであることに注意してほしい．これらはまだ文章が続いているのである．実際

任意の $x \in A$ に対して, $\underline{P(x)\text{ が成立する.}}$
For all $x \in A$, the condition $P(x)$ holds.
The condition $P(x)$ holds for all $x \in A$.

のように x に関する条件 $P(x)$ が続く場合に「任意の〜に対して」や「$^\forall$」を用いることが多い. 逆に, 条件 $P(x)$ がすぐに現れない場合には, (4) のように「$x \in A$ とする.」と一度文章を区切る方がスマートである. つまり「任意の $x \in A$ とする」や「$^\forall x \in A$ とする」という表現はやや不自然で（そのように書く人も多々いるが）, 「$x \in A$ とする.」もしくは任意性を強調したいならば「任意に $x \in A$ をとる.」と書いた方が自然である.

問 2 [集合論の復習] X を集合とする. 「すべての (任意の)$x \in X$ に対して性質 $P(x)$ が成立する」ことを略記して

$$\forall x \in X, P(x) \quad や \quad {}^\forall x \in X, P(x)$$

とかく [1]. 「ある $x \in X$ が存在して性質 $P(x)$ が成立する」ことを略記して

$$\exists x \in X \text{ s.t. } P(x) \quad や \quad {}^\exists x \in X \text{ s.t. } P(x)$$

とかく [2]. 次の日本語で書かれた命題を, 上記の「$\forall$」や「$\exists$ — s.t.」を用いて書き直せ. またその命題は正しいか (真), 正しくないか (偽) を判断せよ [3].

(1) すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して, $x > 0$.

(2) ある $x \in \mathbb{Q}$ が存在して, $\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$.

(3) 任意の $x \in \mathbb{N}$ に対して, $x \geq 0$.

(4) ある $x \in \mathbb{Z}$ が存在して, $6 = 2x$.

(5) すべての $x \in \mathbb{Z}$ に対して, $6 = 2x$.

(6) 任意の $x \in \mathbb{C}$ に対して, ある $a, b \in \mathbb{R}$ が存在して, $x = a + bi$.

(7) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して, ある $y \in \mathbb{N}$ が存在して, $x < y$.

(8) ある $x \in \mathbb{R}$ が存在して, 任意の $y \in \mathbb{N}$ に対して, $x < y$.

(9) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して, ある $y \in \mathbb{N}$ が存在して, $x > y$.

(10) ある $x \in \mathbb{R}$ が存在して, 任意の $y \in \mathbb{N}$ に対して, $x > y$.

解答例

(1) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$. これは偽である (なぜなら $x = -1$ を選ぶと $x > 0$ ではないので反例が見つかる).

(2) $\exists x \in \mathbb{Q}$ s.t. $\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$. これは真である ($x = 1.5 = 3/2$ がこれに該当する).

(3) $\forall x \in \mathbb{N}, x \geq 0$. これは真である.

(4) $\exists x \in \mathbb{Z}$ s.t. $6 = 2x$. これは真である ($x = 3$ がこれに該当する).

(5) $\forall x \in \mathbb{Z}, 6 = 2x$. これは偽である (なぜなら $x = 3$ 以外の整数では $6 = 2x$ を満たさない).

---

[1] 英語で書くと「For all $x \in X$, $P(x)$ holds」というような文章になる. For all の「a」をひっくり返して「$\forall$」を用いて書いている.

[2] 英語で書くと「There exists $x \in X$ such that $P(x)$ holds」というような文章になる. There exists の「e」をひっくり返して「$\exists$」を用いて, 「such that」を「s.t.」と省略して書いている.

[3] 問題中に使われている白抜きの記号には意味が割り当てられている: $\mathbb{N}$ は自然数, $\mathbb{Z}$ は整数, $\mathbb{Q}$ は有理数, $\mathbb{R}$ は実数, $\mathbb{C}$ は複素数を意味する.

(6) $\forall x \in \mathbb{C}, \exists a, b \in \mathbb{R}$ s.t. $x = a + bi$. これは真である.

(7) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{N}$ s.t. $x < y$. これは真である. どんな実数 x に対してもそれより大きな自然数 y が存在するという意味である.

(8) $\exists x \in \mathbb{R}$ s.t. $\forall y \in \mathbb{N}, x < y$. これは真である (なぜなら $x = -1$ とすれば, すべての自然数 y に対して $-1 < y$ である).

(9) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{N}$ s.t. $x > y$. これは偽である (なぜなら x が負の実数のとき, $0 > x > y$ を満たすような自然数 y は存在しない).

(10) $\exists x \in \mathbb{R}$ s.t. $\forall y \in \mathbb{N}, x > y$. これは偽である (なぜなら自然数は上に有界ではないから. 言い換えると, ある実数 x が存在してすべての自然数 y に対して $x > y$ とできるならば x 以上の自然数は存在しないことになるがそれは矛盾).