2026/11/03/No.6

微分方程式II・自習シート

問1　$x := x(t), y := y(t)$ とする. 次の連立微分方程式の一般解を次の手順に従って求めよ.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 5y \end{cases}$$

簡単のため $dx/dt = x'$, $dy/dt = y'$ のように表記する.

(1) 2つめの式 $x = -y' - 5y$ とそれを微分した式

$$x' = -y'' - 5y'$$

を用意する. これらを1つめの式に代入することで y だけの微分方程式

$$y'' + 7y' + 12y = 0$$

が得られることを確かめよ.

(2) (1) で得られた微分方程式を解いて一般解 y を求めよ.

(3) (2) で得られた y を用いて x を求めよ.

問2　$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ とし, $h \in \mathbb{R}; h \neq 0$ とする. e^{hA} の第 N 項 ($(hA)^N$ の項) までの和は

$$I + (hA) + \frac{1}{2!}(hA)^2 + \cdots + \frac{1}{N!}(hA)^N$$

とかける. 次の問いに答えよ.

(1)

$$\left\| \frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} - Ae^{tA} \right\| \leq \left\| \frac{1}{h}\left(e^{hA} - I\right) - A \right\| \|e^{tA}\|$$

を証明せよ.

(2) $h \to 0$ とすると

$$\left\| \frac{1}{h}\left(e^{hA} - I\right) - A \right\| \to 0$$

であることを, (1) の結果と三角不等式を用いて証明せよ. ただし,

$$\left\| e^{hA} - \left(I + (hA) + \frac{1}{2!}(hA)^2 + \cdots + \frac{1}{N!}(hA)^N \right) \right\| \leq o(h^N)$$

を用いてもよい. ここで, $o(h^N)$ とは

$$\lim_{h\to 0} \frac{o(h^N)}{h^N} = 0$$

を意味し, さらに h^N のみならず, h^k $(k = 1, 2, \ldots, N)$ のいずれで割っても 0 に収束することに注意する.

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

(3) 上記の (2) を用いて

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}$$

であることを証明せよ. ただし, 成分が時間に依存する行列に対する微分 d/dt は各成分を微分した行列を意味する.

問 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

について

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

$$A^3 = A^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

よって

$$\begin{aligned} e^{tA} &= I + tA + \frac{1}{2!}(tA)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(tA)^n + \cdots \\ &= I + tI + \frac{1}{2!}t^2 I + \cdots + \frac{1}{n!}t^n I + \cdots \\ &= \begin{pmatrix} 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}t^n + \cdots & 0 \\ 0 & 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}t^n + \cdots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が求められる. 同様に

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

について B^n, C^n を計算し e^{tB} と e^{tC} をそれぞれ求めよ.

問 4 [線形代数の復習]

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

について, 次の問いに答えよ.

(1) 固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) 対角化を行うことで A^n を求めよ.