2026/10/30/No.4

微分方程式II・自習シート

問 1　次の問いに答えよ.

(1) I, A, B を

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする. I^2, I^3 はそれぞれ

$$I^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I^3 = I^2 I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

よって, これを一般化すると

$$I^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

である. A^2, A^3, B^2, B^3 をそれぞれ計算せよ. また, それを元に A^n, B^n を求めよ.

(2) 行列 A に対する指数を

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n + \cdots \left(= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^n \right)$$

で定義すると, e^I は

$$\begin{aligned} e^I &= I + I + \frac{1}{2!}I^2 + \cdots + \frac{1}{n!}I^n + \cdots \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \cdots + \frac{1}{n!}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \cdots \\ &= \begin{pmatrix} 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots & 0 \\ 0 & 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と求められる. e^I の例を元に, e^A, e^B をそれぞれ求めよ.

問 2　A, B を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする. フロベニウスノルムを

$$\begin{aligned} \|A\| &:= \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}^2} \qquad \left(\text{つまり} = \sqrt{\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{2} a_{ij}^2\right)} \quad \right) \\ &= \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2} \quad (i,j=1 \text{ から } i,j=2 \text{ までのすべての和}) \end{aligned}$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

と定義する. $\|A\|, \|B\|, \|AB\|$ をそれぞれ求め, さらに

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

を満たしていることを確かめよ.

問 3　A, B を 2 次正方行列とする. すなわち

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

とする. フロベニウスノルム

$$\|A\| := \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}^2} \qquad \left(\text{つまり} = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{2} a_{ij}^2 \right)} \quad \right)$$
$$= \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2} \quad (i, j = 1 \text{ から } i, j = 2 \text{ までのすべての和})$$

に対して

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

が成立することを証明せよ. ただし, つぎのシュワルツの不等式を用いてもよい.

$$ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 \qquad (\text{全部ばらすならば})$$

$$\left(\sum_{k=1}^{2} c_k d_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{2} c_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{2} d_k^2 \right) \qquad (\text{和の形を残しながらならば})$$