2026/10/20/No.4

微分方程式II・自習シート

問 1　次の問いに答えよ.

(1) I, A, B を

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする. I^2, I^3 はそれぞれ

$$I^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I^3 = I^2 I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

よって, これを一般化すると

$$I^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

である. A^2, A^3, B^2, B^3 をそれぞれ計算せよ. また, それを元に A^n, B^n を求めよ.

(2) 行列 A に対する指数を

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n + \cdots \left(= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^n \right)$$

で定義すると, e^I は

$$\begin{aligned} e^I &= I + I + \frac{1}{2!}I^2 + \cdots + \frac{1}{n!}I^n + \cdots \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \cdots + \frac{1}{n!}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \cdots \\ &= \begin{pmatrix} 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots & 0 \\ 0 & 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と求められる. e^I の例を元に, e^A, e^B をそれぞれ求めよ.

解答例

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O,$$

$$A^3 = A^2 A = OA = O.$$

よって, これを一般化すると

$$A^n = O.$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

次に,

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B^3 = B^2B = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

よって, これを一般化すると

$$B^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

以上により,

$$\begin{aligned} e^A &= I + A + \frac{1}{2!}O + \cdots \\ &= I + A \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^B &= I + B + \frac{1}{2!}B^2 + \cdots + \frac{1}{n!}B^n + \cdots \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \cdots + \frac{1}{n!}\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \cdots \\ &= \begin{pmatrix} 1 + 2 + \frac{1}{2!}2^2 + \cdots + \frac{1}{n!}2^n + \cdots & 0 \\ 0 & 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

と求められる.

問 2　A, B を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする. フロベニウスノルムを

$$\begin{aligned} \|A\| &:= \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}^2} \qquad \left(\text{つまり} = \sqrt{\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{2} a_{ij}^2\right)} \quad \right) \\ &= \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2} \quad (i,j = 1 \text{ から } i,j = 2 \text{ までのすべての和}) \end{aligned}$$

と定義する. $\|A\|, \|B\|, \|AB\|$ をそれぞれ求め, さらに

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

を満たしていることを確かめよ.

解答例　$\|A\| = \sqrt{0^2+1^2+0^2+0^2} = 1$, $\|B\| = \sqrt{2^2+0^2+0^2+1^2} = \sqrt{5}$. 次に

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より $\|AB\| = 1$. よって

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

を満たしている.

問 3　A, B を 2 次正方行列とする. すなわち

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

とする. フロベニウスノルム

$$\begin{aligned} \|A\| &:= \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}^2} \qquad \left(\text{つまり} = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{2} a_{ij}^2 \right)} \quad \right) \\ &= \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2} \quad (i,j = 1 \text{ から } i,j = 2 \text{ までのすべての和}) \end{aligned}$$

に対して

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

が成立することを証明せよ. ただし, つぎのシュワルツの不等式を用いてもよい.

$$ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 \qquad (\text{全部ばらすならば})$$

$$\left(\sum_{k=1}^{2} c_k d_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{2} c_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{2} d_k^2 \right) \qquad (\text{和の形を残しながらならば})$$

解答例　(その 1: 全部ばらしてひたすら計算する)

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}. \end{pmatrix}$$

よって,

$$
\begin{aligned}
\|AB\| &= \left\{(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})^2+(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})^2+(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})^2+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})^2\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\{(a_{11}^2b_{11}^2+2a_{11}a_{12}b_{11}b_{21}+a_{12}^2b_{21}^2)+(a_{11}^2b_{12}^2+2a_{11}a_{12}b_{12}b_{22}+a_{12}^2b_{22}^2)\right. \\
&\quad \left.+(a_{21}^2b_{11}^2+2a_{21}a_{22}b_{11}b_{21}+a_{22}^2b_{21}^2)+(a_{21}^2b_{12}^2+2a_{21}a_{22}b_{12}b_{22}+a_{22}^2b_{22}^2)\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left\{\left(a_{11}^2b_{11}^2+2\left(\frac{1}{2}a_{11}^2b_{21}^2+\frac{1}{2}a_{12}^2b_{11}^2\right)+a_{12}^2b_{21}^2\right)\right. \\
&\quad +\left(a_{11}^2b_{12}^2+2\left(\frac{1}{2}a_{11}^2b_{22}^2+\frac{1}{2}a_{12}^2b_{12}^2\right)+a_{12}^2b_{22}^2\right) \\
&\quad +\left(a_{21}^2b_{11}^2+2\left(\frac{1}{2}a_{21}^2b_{21}^2+\frac{1}{2}a_{22}^2b_{11}^2\right)+a_{22}^2b_{21}^2\right) \\
&\quad \left.+\left(a_{21}^2b_{12}^2+2\left(\frac{1}{2}a_{21}^2b_{22}^2+\frac{1}{2}a_{22}^2b_{12}^2\right)+a_{22}^2b_{22}^2\right)\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\{\left(a_{11}^2b_{11}^2+a_{11}^2b_{21}^2+a_{12}^2b_{11}^2+a_{12}^2b_{21}^2\right)+\left(a_{11}^2b_{12}^2+a_{11}^2b_{22}^2+a_{12}^2b_{12}^2+a_{12}^2b_{22}^2\right)\right. \\
&\quad \left.+\left(a_{21}^2b_{11}^2+a_{21}^2b_{21}^2+a_{22}^2b_{11}^2+a_{22}^2b_{21}^2\right)+\left(a_{21}^2b_{12}^2+a_{21}^2b_{22}^2+a_{22}^2b_{12}^2+a_{22}^2b_{22}^2\right)\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\{\left(\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}^2\right)\left(\sum_{i,j=1}^{2}b_{ij}^2\right)\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \|A\|\|B\|.
\end{aligned}
$$

(その 2: 和の形を残しながら計算する)

$$
AB=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{2}a_{1k}b_{k1}&\sum_{k=1}^{2}a_{1k}b_{k2}\\\sum_{k=1}^{2}a_{2k}b_{k1}&\sum_{k=1}^{2}a_{2k}b_{k2}\end{pmatrix}.
$$

よって,

$$\begin{aligned}
\|AB\| &= \left\{ \left(\sum_{k=1}^{2} a_{1k}b_{k1} \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{2} a_{1k}b_{k2} \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{2} a_{2k}b_{k1} \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{2} a_{2k}b_{k2} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left\{ \left(\sum_{k=1}^{2} a_{1k}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{2} b_{k1}^2 \right) + \left(\sum_{k=1}^{2} a_{1k}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{2} b_{k2}^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\sum_{k=1}^{2} a_{2k}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{2} b_{k1}^2 \right) + \left(\sum_{k=1}^{2} a_{2k}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{2} b_{k2}^2 \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\{ \left(\sum_{k=1}^{2} a_{1k}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{2} (b_{k1}^2 + b_{k2}^2) \right) + \left(\sum_{k=1}^{2} a_{2k}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{2} b_{k1}^2 + \sum_{k=1}^{2} b_{k2}^2 \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\{ \left(\sum_{k=1}^{2} a_{1k}^2 \right) \left(\sum_{k,j=1}^{2} b_{kj}^2 \right) + \left(\sum_{k=1}^{2} a_{2k}^2 \right) \left(\sum_{k,j=1}^{2} b_{kj}^2 \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\{ \left(\sum_{k=1}^{2} (a_{1k}^2 + a_{2k}^2) \right) \left(\sum_{k,j=1}^{2} b_{kj}^2 \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\{ \left(\sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}^2 \right) \left(\sum_{i,j=1}^{2} b_{kj}^2 \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \|A\|\|B\|.
\end{aligned}$$

注: ノルム $\|\cdot\|$ は $\mathbb{R}$ における絶対値の一般化と言えます. 実数の絶対値は次の性質を持っています. $X = \mathbb{R}$ とおくと

(1) $|x| = 0$ ならば, またそのときに限り $x = 0$;

(2) 任意の $c \in \mathbb{R}$ と $x \in X$ に対して $|cx| = |c||x|$;

(3) 任意の $x, y \in X$ に対して $|x + y| \leq |x| + |y|$.

ここで, (2) ではわざと $c \in \mathbb{R}$ と $x \in X$ と分けて書いています. cx が x の定数倍ということを強調したいからです.

次に $X = \mathbb{R}^{2\times 2}$(2 次正方行列) の場合を考えてみます. まず和 $A + B$ と定数倍 cA が定義できていることに注意します. そしてフロベニウスノルムは上と同じような性質を持っています.

(1) $\|A\| = 0$ ならば, またそのときに限り $A = O$;

(2) 任意の $c \in \mathbb{R}$ と $A \in X$ に対して $\|cA\| = |c|\|A\|$;

(3) 任意の $A, B \in X$ に対して $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

一般に, ノルムとは, 和と定数倍が定義された集合 X に対して, 次の 3 条件を満たす $\|\cdot\|$ のことです. **和と定数倍が定義されている集合における絶対値のようなものです.**

(1) $\|x\| = 0$ ならば, またそのときに限り $x = 0_X$;

(2) 任意の $c \in \mathbb{R}$ と $x \in X$ に対して $\|cx\| = |c|\|x\|$;

(3) 任意の $x, y \in X$ に対して $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

ここで, (1) に現れる 0_X とは, 集合 X における原点を表す元です. 例えば $\mathbb{R}^{2\times 2}$ なら $0_X = O = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ です.

問 2, 問 3 は行列には数と同じように積 AB も定義されているけれど, 絶対値の場合の $|xy| = |x||y|$ に比べると必ずしも等号にはならないけれど, $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ というように不等式 (劣乗法性) が成立することを証明しています.