2026/10/13/No.3

微分方程式II・自習シート

問1　次の f の括弧内の点における n 次近似式を, ランダウの記号 o を用いて等式で求めよ.

(1) $f(x) = e^{2x} \quad (x = 0)$

(2) $f(x) = \log(1+x) \quad (x = 1)$

解答例　(1)

$$\begin{aligned} f(x) = e^{2x}, &\quad f(0) = 1, \\ f'(x) = 2e^{2x}, &\quad f'(0) = 2, \\ f''(x) = 2^2 e^{2x}, &\quad f''(0) = 2^2, \\ f^{(3)}(x) = 2^3 e^{2x}, &\quad f^{(3)}(0) = 2^3, \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}, &\quad f^{(n)}(0) = 2^n. \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} e^{2x} &= f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{1}{2!}f''(0)(x-0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)(x-0)^n + o(x^n) \\ &= 1 + 2x + \frac{2^2}{2!}x^2 + \frac{2^3}{3!}x^3 + \frac{2^4}{4!}x^4 + \cdots + \frac{2^n}{n!}x^n + o(x^n) \\ &= 1 + 2x + \frac{1}{2!}(2x)^2 + \frac{1}{3!}(2x)^3 + \frac{1}{4!}(2x)^4 + \cdots + \frac{1}{n!}(2x)^n + o(x^n) \end{aligned}$$

(上の式でも下の式でもよい).

(2)

$$\begin{aligned} f(x) = \log(1+x), &\quad f(1) = \log(1+1) = \log 2, \\ f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}, &\quad f'(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \\ f''(x) = -(1+x)^{-2}, &\quad f''(1) = -\frac{1}{(1+1)^2} = -\frac{1}{2^2}, \\ f^{(3)}(x) = -(-2)(1+x)^{-3}, &\quad f^{(3)}(1) = -(-2)(1+1)^{-3} = 2\frac{1}{2^3}, \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}, & \\ f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+1)^{-n} = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{2^n}. & \end{aligned}$$

提出する場合は, 解答例を参考にして自分で採点をしておくこと. 提出しなくても試験で 60 点以上取れば合格です.

よって

$$\begin{aligned}\log(1+x) &= f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{1}{2!}f''(1)(x-1)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(1)(x-1)^n+o((x-1)^n)\\ &= \log 2+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{2!}\frac{1}{2^2}(x-1)^2+\frac{2!}{3!}\frac{1}{2^3}(x-1)^3-\frac{3!}{4!}\frac{1}{2^4}(x-1)^4+\\ &\quad\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{n!}\frac{1}{2^n}(x-1)^n+o((x-1)^n)\\ &= \log 2+\frac{x-1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{2}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{x-1}{2}\right)^4+\\ &\quad\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n+o((x-1)^n)\quad\text{(上の式でも下の式でもよい).}\end{aligned}$$

問 2　$\cosh x$ の $x=0$ における $2n$ 次近似式, $\sinh x$ の $x=0$ における $2n+1$ 次近似式を, それぞれランダウの記号 o を用いて等式で求めよ. ただし, それぞれの関数は次のように定義される ($\cosh x$ はハイパボリックコサイン, $\sinh x$ はハイパボリックサインと読む).

$$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\qquad \sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

解答例　まず, 定義から

$$(\cosh x)'=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\sinh x,\qquad (\sinh x)'=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\cosh x,$$

$$\cosh 0=\frac{1+1}{2}=1,\qquad \sinh 0=\frac{1-1}{2}=0$$

であることに注意する.

$f(x)=\cosh x$ とおくと, $f'(x)=\sinh x$, $f''(x)=\cosh x$, $f^{(3)}(x)=\sinh x$, $f^{(4)}(x)=\cosh x$, $f^{(5)}(x)=\sinh x$ と続き, $x=0$ を代入すると $f(0)=1$, $f'(0)=0$, $f''(0)=1$, $f^{(3)}(0)=0$, $f^{(4)}(0)=1$, $f^{(5)}(0)=0$ と続き, さらに

$$f^{(2n)}(0)=1,\qquad f^{(2n+1)}(0)=0$$

を得る. よって,

$$\begin{aligned}\cosh x &= f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{1}{(2n)!}f^{(2n)}(0)x^{2n}+o(x^{2n})\\ &= 1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots+\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n}).\end{aligned}$$

$f(x)=\sinh x$ とおくと, $f'(x)=\cosh x$, $f''(x)=\sinh x$, $f^{(3)}(x)=\cosh x$, $f^{(4)}(x)=\sinh x$, $f^{(5)}(x)=\cosh x$ と続き, $x=0$ を代入すると $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=0$, $f^{(3)}(0)=1$, $f^{(4)}(0)=0$, $f^{(5)}(0)=1$ と続き, さらに

$$f^{(2n)}(0)=0,\qquad f^{(2n+1)}(0)=1$$

を得る. よって,

$$\begin{aligned}\sinh x &= f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{1}{(2n+1)!}f^{(2n+1)}(0)x^{2n+1}+o(x^{2n+1})\\ &= x+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots+\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+o(x^{2n+1}).\end{aligned}$$

問 3　A を $n \times n$ 行列とする. 以後, 行列を

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

とかくことにする. 「実数の大きさの数値化」である絶対値のように, 「行列 A の大きさ」の数値化として**ノルム** [1)] を

$$\|A\| := \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2} \qquad \left(\text{つまり} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)} \right)$$
$$= \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{1n}^2 + a_{21}^2 + \cdots + a_{nn}^2} \quad (i, j = 1 \text{ から } i, j = n \text{ までのすべての和})$$

を定義する (A のフロベニウスノルムと呼ぶことがある). このとき, 次の行列 A, B, I に対して $\|A\|$, $\|B\|$, $\|I\|$ の値をそれぞれ求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

解答例

$$\|A\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 8^2 + 10^2} = \sqrt{169} = 13$$
$$\|B\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{16} = 4$$
$$\|I\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

[1)] 行列式 $|A|$ とは異なることに注意. 実際, 行列 A

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

の行列式

$$|A| = ad - bc$$

は行列の大きさの数値化としては不適切である. 例えば

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の行列式 $|C|$ は 0 であるが, C 自身は成分がすべて 0 の行列ではなく, 実数 r に対して $|r| = 0$ ならばまたそのときに限り $r = 0$ であるという「大きさの数値化」の前提 (ノルムの定義) を満たしていない. 行列式はその行列が作る変換の面積倍率を意味している.