ISBN978-4-623-09408-0
C3037 ¥2800E

9784623094080

1923037028009

定価(本体2,800円＋税)

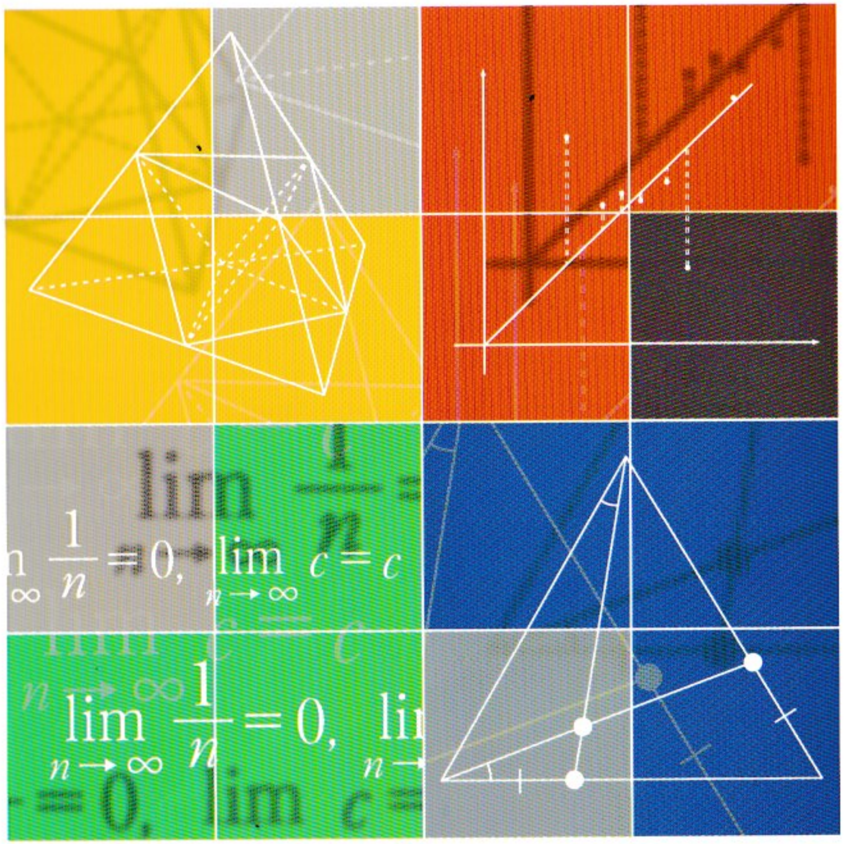
中等数学科教育の理論と実践

二澤善紀［編著］

ミネルヴァ書房

中等数学科教育の理論と実践

二澤善紀
[編著]



ミネルヴァ書房

よいという意見が出てくると考えられるから，指数関数に近似してその微分積分を考えることになる。生徒たちの既習の数学知識がどこまでかを考慮して，取り扱う数学モデルを変更すればよい。

3　微分積分分野における数学的背景

（1）数値化からみた微分法と積分法

自然科学の様々な現象解明の場面において，現象の各要素の数値化は最初に行われる重要な行動であることはいうまでもない。数値化という視点に立てば微分積分においては微分係数や変化の割合は増え方の数値化といえるだろうし，面積とは広がりの数値化といえる。例えば，２つの関数 $y=f(x)$，$y=g(x)$ について，「関数 $y=f(x)$ について $f(x)$ が急に増えた」「関数 $y=g(x)$ について $g(x)$ が一気に増えた」のような言葉による表現では，２つの増え方の比較はできないが，「$f'(1)=2$ と $g'(1)=3$ より，$x=1$ においては $f(x)$ より $g(x)$ の方がより急に増えた」という表現なら，比較することができる。一般に数学の指導方法には，これが正解というものはなく，様々な指導方法が考えられるが，数値化という見方に基づいて導関数や積分の指導を考えてみるとよい。

① 微分法

微分法の指導を考察するにあたり，まず微分係数と導関数の違いを確認する。一言でいうと微分係数は数であり導関数は関数である。つまり，関数 $y=f(x)$ に対して，ある点 $x=a$ における $f(x)$ の増え方の数値化が微分係数であるといえ，その微分係数を求めるための関数が導関数である。なお，厳密にいえば，高等学校数学では「微分」を学ぶ場面はなく，「微分係数」「導関数」を学んだ後に，導関数を求めることを「微分する」として学ぶ。例えば高木（1963）にもあるが，微分とは，

$$df=f'(x)dx$$

で定義される $df:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ dx\mapsto f'(a)dx\ (a\in\mathbb{R})$ であることに注意したい。$f'(a)$ を微分係数と呼ぶ理由もここからわかる。次に増え方の数値化を行うに

あたり，まずは２点間における増え方の数値化である変化の割合について確認しよう。変化の割合とは，２点間 $x=a$ から $x=a+h$ に定義される増え方の数値化で，

$$\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

で定義される。変化の割合が正であれば２点間において関数は結果的に増加し，変化の割合が負であれば関数は結果的に減少し，変化の割合が０であれば結果的に値は変化していないといえる。ここで，この「結果的に」とはどのような意味だろうか。例えば，「結果的に値は変化していない」とは２点間において関数の値がずっと一定であった可能性もあれば，増えたり減ったりしながら結果的に２点の値が同じであった可能性もある。つまり，それぞれ「平均的にみて増加」「平均的にみて減少」「平均的にみて一定」という意味である（なお，高等学校では変化の割合のことを平均変化率と呼び直す）。これは変化の割合が２点間における増え方の数値化であることが原因であり，その瞬間の増え方の数値化ではないからである。そこで，高等学校で極限の概念を習得した後，関数の増え方の数値化として，１点 $x=a$ における数値化を試みたのが微分係数である。このような理由からも微分係数の定義の指導の際には，

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

において，変化の割合の極限によって定義がされていることに注目させるべきである。また，$x=a$ の微分係数 $f'(a)$ の符号や大きさは $x=a$ における関数の増え方，すなわち勾配に対応している。いい換えれば接線の傾きの符号や大きさと一致している。よって，微分係数 $f'(a)$ が０であることが，$x=a$ における接線が x 軸と平行であること，すなわち停留点であることを正しく表現している事実を確かめることで，関数の増え方の数値化として適切であったことが確認され，また増減表をはじめとするその後の学習につながっていく。なお関数の値そのものと，関数の増え方の数値化とは異なる点に注意したい。

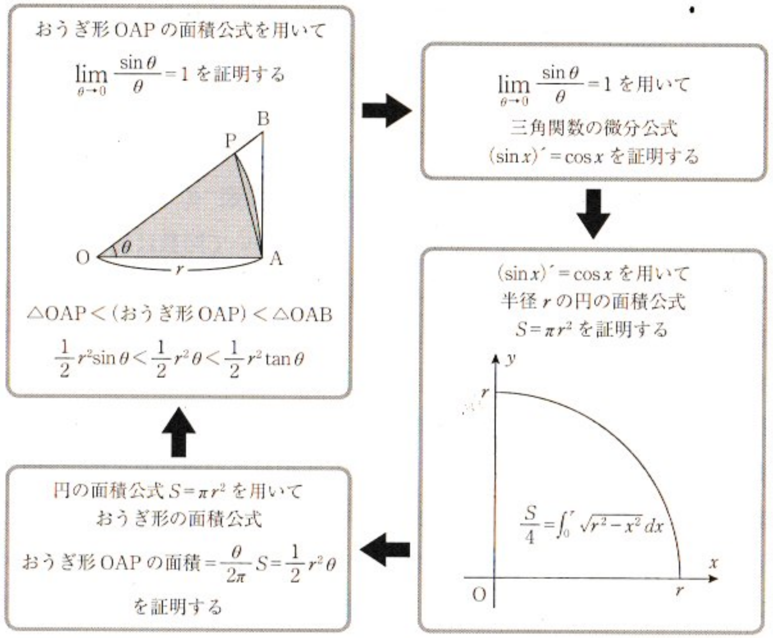


図5-6　循環論法

② 積分法

積分法の指導を考察するには，面積の概念に触れざるを得ない。面積とは広がりの数値化であるといえる。境界を含む閉じた図形に対して基本単位である正方形が何個分という形で広がりの数値化がなされ，直線で囲まれる図形に対しては面積公式を証明し，そして曲線で囲まれる図形の1つである円に対しては円の面積公式を知識として，生徒は中学校数学までで学習をしてきている。高等学校では積分法の学習によって，これまで生徒が知識として知っていた円の面積の公式をようやく証明できることになる。ただし，多くの高等学校数学の教科書では，$f(x) = \sin x$ の導関数を求める際に必要な，

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

の証明におうぎ形の面積公式を用いているため，結果的に循環論法になってい

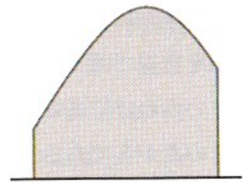


図5-7　広がりはあるが，その数値化はどのように行う？

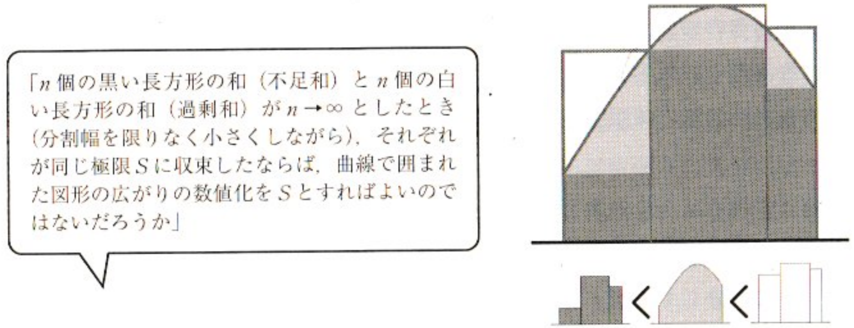


図5-8　過剰和と不足和による評価

る点に注意したい。実際，この場面ではおうぎ形の面積を求めるために円の面積の公式を用いているからである（図5-6）。数学的にこの点を回避する方法はいくつかあるので特に高等学校教員を目指す学生には各自で学びを深めておくべきである。

広がりの数値化に話を戻すと，そもそも曲線で囲まれた図形の広がりをどのように数値化するのかという課題になる（図5-7）。すなわち曲線で囲まれた図形の面積の定義に関する課題である。これは解析学でリーマン積分を学習すればすぐ解決するが，ここではその概要について述べておく。長方形に対する広がりの数値化がなされている前提で，対象となる曲線で囲まれた図形（図5-7）に含まれる長方形の和集合と図形を覆うような長方形の和集合を考え，それぞれの面積を不足和，過剰和として定義する（図5-8）。例えば，連続な関数 $f:[a, b] \to [0, \infty)$ に対して，「直線 $x=a$, $x=b$, x 軸と曲線 $y=f(x)$ で囲まれる図形」であれば区間 $[a, b]$ を細分し，ダルブーの定理によって不足和と過