令和7年度 微積分及び演習I 小テスト No.2

数理・知能・電子・機械・応化・環境　課程 _____ 回生　　学生番号 ________________　名前 ____________________

$\boxed{6}$ 次の命題の否定を作れ．ただし，問題中の集合 $E \subset \mathbb{R}$ や数列 $\{a_n\}$，値などについては宣言をしていないが適宜判断せよ．

(1) $^\forall x \in E,\, x \leq \alpha$.

(2) $^\exists M > 0$ s.t.

$$^\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| \leq M.$$

(3) $^\forall \varepsilon > 0,\, ^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$^\forall n \geq N_\varepsilon, \quad |a_n - \alpha| < \varepsilon.$$

解答例　(1) $^\exists x_0 \in E$ s.t. $x_0 > \alpha$.

(2) $^\forall M > 0,\, ^\exists n_M \in \mathbb{N}$ s.t.

$$|a_{n_M}| > M.$$

(3) $^\exists \varepsilon_0 > 0$ s.t. $^\forall N \in \mathbb{N},\, ^\exists n_N \geq N$ s.t.

$$|a_{n_N} - \alpha| \geq \varepsilon_0.$$

$\boxed{7}$ $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を数列とする．このとき，$a_n \to \alpha$, $b_n \to \beta$ $(n \to \infty)$ ならば

$$a_n + b_n \to \alpha + \beta \quad (n \to \infty)$$

であることを ε-N 論法で証明せよ．

解答例　$^\forall \varepsilon > 0,\, ^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$^\forall n \geq N_\varepsilon, \quad |(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| < \varepsilon$$

を示せばよい．$\varepsilon > 0$ とする．仮定より，$^\exists N_\alpha, N_\beta \in \mathbb{N}$ s.t.

$$^\forall n \geq N_\alpha, \quad |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$^\forall n \geq N_\beta, \quad |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$N_\varepsilon := \max\{N_\alpha, N_\beta\}$ とおくと，$N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ で，さらに

$$\begin{aligned} ^\forall n \geq N_\varepsilon, \quad |(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| &= |a_n - \alpha + b_n - \beta| \\ &\leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

以上より

$$a_n + b_n \to \alpha + \beta \quad (n \to \infty)$$

が成立．　□

$\boxed{8}$ $\{a_n\}$ を数列とする．このとき，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ならば

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = c\alpha$$

であることを ε-N 論法で証明せよ．ただし，$c \in \mathbb{R}$ は定数である．

解答例　$^\forall \varepsilon > 0,\, ^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$^\forall n \geq N_\varepsilon, \quad |ca_n - c\alpha| < \varepsilon$$

を示せばよい．$\varepsilon > 0$ とする．仮定より $^\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$^\forall n \geq N_\varepsilon, \quad |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{1 + |c|}.$$

よって，$^\forall n \geq N_\varepsilon$,

$$\begin{aligned} |ca_n - c\alpha| &= |c||a_n - \alpha| \\ &\leq (1 + |c|)|a_n - \alpha| \\ &< (1 + |c|)\frac{\varepsilon}{1 + |c|} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

以上より，$\lim_{n\to\infty} ca_n = c\alpha$ が成立．　□

注

$$a_n \to \alpha, \quad (n \to \infty)$$

と表記するのも，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

と表記するのも同じことである．ただし，よくある誤植として

$$\lim_{n\to\infty} a_n \to \alpha$$

と書いてしまう人がいるが，これは間違いである．

$\boxed{9}$ 一般項が次のように与えられた数列 $\{a_n\}$ の 0 への収束を ε-N 論法で証明せよ.

(1) $a_n := \dfrac{1}{n}$

(2) $a_n := \dfrac{2}{\sqrt[3]{n}}$

解答例　(1) $\varepsilon > 0$ とする. アルキメデスの原理より, ${}^{\exists}N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\frac{1}{\varepsilon} < N_\varepsilon.$$

このとき,

$$\frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon.$$

よって, ${}^{\forall}n \geq N_\varepsilon$,

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{n} - 0\right| &= \frac{1}{n} \\ &\leq \frac{1}{N_\varepsilon} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

以上より

$$a_n \to 0 \quad (n \to +\infty).$$

□

(2) $\varepsilon > 0$ とする. アルキメデスの原理より, ${}^{\exists}N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\frac{8}{\varepsilon^3} < N_\varepsilon.$$

このとき,

$$\frac{8}{N_\varepsilon} < \varepsilon^3,$$

$$\frac{2}{\sqrt[3]{N_\varepsilon}} < \varepsilon,$$

よって, ${}^{\forall}n \geq N_\varepsilon$,

$$\begin{aligned} \left|\frac{2}{\sqrt[3]{n}} - 0\right| &= \frac{2}{\sqrt[3]{n}} \\ &\leq \frac{2}{\sqrt[3]{N_\varepsilon}} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

以上より

$$a_n \to 0 \quad (n \to +\infty).$$

□

$\boxed{10}$ 次の主張の真偽を判定して**すべての番号の横の○か×を選べ**. そのうち正しい主張を 1 つを選んで ε-N 論法で証明せよ.

(1) [○ · ×] 収束する数列は有界である.

(2) [○ · ×] 数列の異なる部分列を選んできても極限は必ず同じ値に定まる.

(3) [○ · ×] 有界な数列は収束する部分列を持つ.

(4) [○ · ×] 上に有界かつ単調増加な数列は収束する.

(5) [○ · ×] コーシー数列であっても収束しない数列が存在する.

私が選んだのは (1)

解答例　(1) $\{a_n\}$ を数列とし, $a_n \to \alpha$ $(n \to \infty)$ と仮定する. このとき, ${}^{\forall}\varepsilon > 0$, ${}^{\exists}N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.t.

$${}^{\forall}n \geq N_\varepsilon, \quad |a_n - \alpha| < \varepsilon.$$

$\varepsilon := 1$ に対しても成り立つので, ${}^{\exists}N_1 \in \mathbb{N}$ s.t.

$${}^{\forall}n \geq N_1, \quad |a_n - \alpha| < 1.$$

つまり, $n \geq N_1$ に対しては, 三角不等式より

$$|a_n| \leq |a_n - \alpha| + |\alpha| < 1 + |\alpha|$$

と言える. $M := \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N_1-1}|, 1 + |\alpha|\}$ とおけば

$${}^{\forall}n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| \leq M.$$

つまり, $\{a_n\}$ は有界である. よって成立.　□