令和7年度 微積分及び演習I 小テスト No.1

数理・知能・電子・機械・応化・環境　課程 ＿＿＿ 回生　　学生番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿ 名前 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ A_α, B, U_λ を集合とする ($\alpha \in I$, $\lambda \in \Lambda$ は添え字, 及び添え字集合とする). このとき, **集合の等号, 包含関係の定義に従って**次を証明せよ.

(1)

$$B \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) \subset \bigcup_{\alpha \in I} (B \cap A_\alpha)$$

(2)

$$\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \right)^c = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda^c$$

$\boxed{2}$ $r \in \mathbb{R}$ とし, A_r, B_r をそれぞれ

$$A_r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-r)^2 + (y-r)^2 \leq 1\},$$

$$B_r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 + |r|\}.$$

このとき, 集合 $\bigcup_{r \in \mathbb{R}} A_r$ と $\bigcap_{r \in \mathbb{R}} B_r$ がどのような集合になるか図示せよ (図示するだけでよく証明は求めない).

$$\bigcup_{r \in \mathbb{R}} A_r \qquad\qquad \bigcap_{r \in \mathbb{R}} B_r$$

$\boxed{3}$ **集合の等号の定義に従って**次を証明せよ.

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(0, 1 + \frac{1}{n} \right) = (0, 1]$$

$\boxed{4}$ $E \subset \mathbb{R}$ を空でない有界な集合とする. β を E の最大下界 $\inf E$ とおくと, その言葉の定義から β は次の 2 つの条件を満たすことを証明せよ:

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad {}^{\forall}x \in E, \quad x \geq \beta; \\ \text{(ii)} \quad {}^{\forall}\varepsilon > 0, {}^{\exists}x_\varepsilon \in E \quad \text{s.t.} \quad \beta + \varepsilon > x_\varepsilon. \end{cases}$$

$\boxed{5}$ $A, B \subset \mathbb{R}$ を空でない有界な集合とする. 次を証明せよ.

(1) $A \subset B$ ならば $\sup A \leq \sup B$.

(2) $E := \{x + y : x \in A, y \in B\}$ とおくと

$$\inf E \leq \inf A + \inf B.$$

(3) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

(4) ${}^{\forall}a \in A, {}^{\exists}b_a \in B$ s.t. $a \leq b_a$ が成立するならば

$$\sup A \leq \sup B.$$